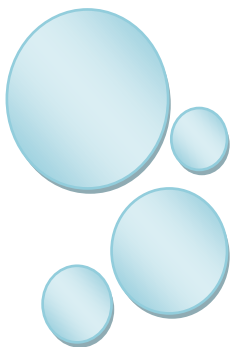


Geometrie



RNDr. Yvetta Bartáková

Gymnázium, SOŠ a VOŠ
Ledeč nad Sázavou



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



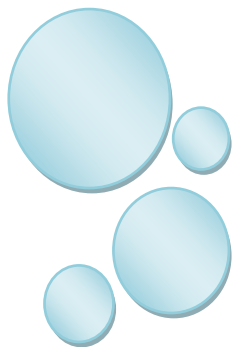
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Objemy a povrchy těles – komolá tělesa



VY_32_INOVACE_05_3_19_M2

Gymnázium, SOŠ a VOŠ
Ledeč nad Sázavou



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



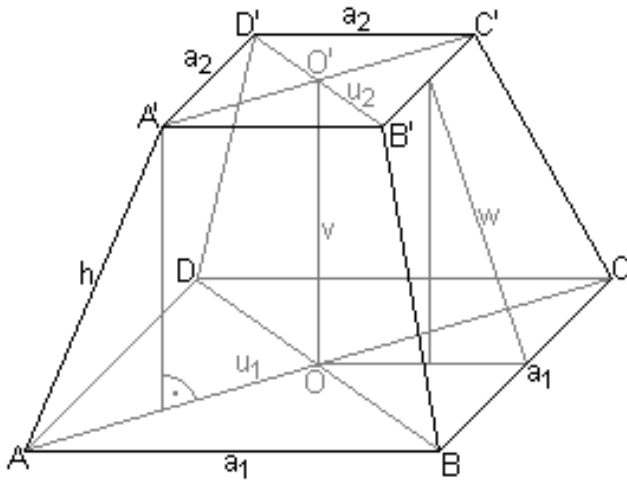
OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Objemy a povrchy těles

A) Komolý jehlan

- je těleso, které vznikne průnikem jehlanu a rovinné vrstvy, pokud vrchol jehlanu leží vně vrstvy (část jehlanu, která leží mezi dvěma rovnoběžnými rovinami procházející tímto jehlanem)



Objem:

$$V = \frac{1}{3}v(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2)$$

$$V = \frac{1}{3}v(a_1^2 + a_1 a_2 + a_2^2)$$

Povrch

$$S = S_1 + S_2 + S_{pl}$$

$$S = a_1^2 + a_2^2 + 4 \frac{(a_1 + a_2) \cdot w}{2}$$

$$S = a_1^2 + a_2^2 + 2w(a_1 + a_2)$$

B) Komolý kužel

- je těleso, které vznikne rotací pravoúhlého lichoběžníku kolem přímky na níž leží kratší rameno nebo otáčením rovnoramenného lichoběžníku kolem jeho osy

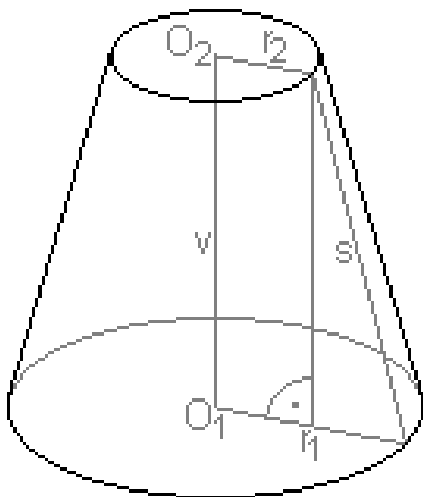
Objem

$$V = \frac{1}{3}v(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2)$$

$$V = \frac{1}{3}\pi v(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)$$

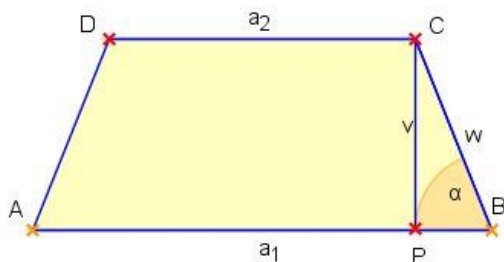
$$S = S_1 + S_2 + S_{pl}$$

Povrch: $S = \pi r_1^2 + \pi r_2^2 + \pi s(r_1 + r_2)$



Příklad 1

Pravidelný komolý čtyřboký jehlan má podstavné hrany délek 6 cm a 4 cm. Boční stěna svírá s rovinou podstavy úhel 60° . Vypočtěte objem a povrch komolého jehlanu.



$$\frac{v}{\frac{a_1 - a_2}{2}} \Rightarrow v = \frac{a_1 - a_2}{2} \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

$$v = \frac{6 - 4}{2} \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$$

$$\cos \alpha = \frac{\frac{a_1 - a_2}{2}}{w} \Rightarrow w = \frac{\frac{a_1 - a_2}{2}}{\cos \alpha}$$

$$w = \frac{1}{\cos 60^\circ} = 2$$

$$V = \frac{1}{3}v(a_1^2 + a_1a_2 + a_2^2)$$

$$V = \frac{1}{3}\sqrt{3}(36 + 24 + 16) = \frac{76}{3}\sqrt{3}$$

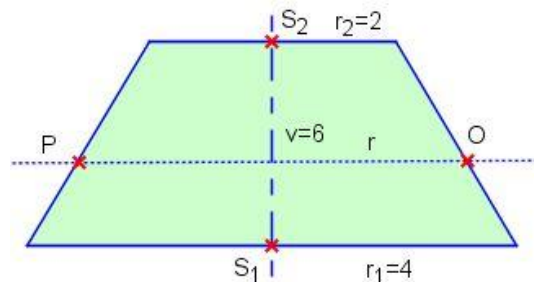
$$S = a_1^2 + a_2^2 + 2w(a_1 + a_2)$$

$$S = 36 + 16 + 2 \cdot 2 \cdot 10 = 92$$

Komolý jehlan má objem $V = \frac{76}{3}\sqrt{3}cm^3$ a povrch $S = 92cm^2$.

Příklad 2

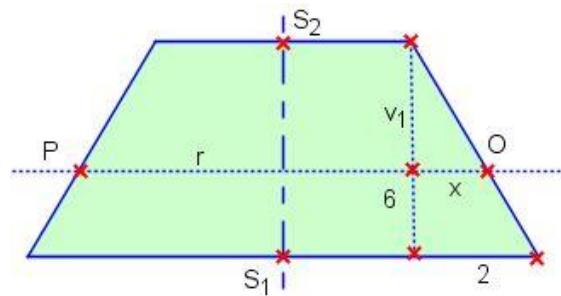
Komolý kužel ($r_1 = 4\text{ cm}$, $r_2 = 2\text{ cm}$, $v = 6\text{ cm}$) je rozdělen rovinou rovnoběžnou s podstavou na dvě části téhož objemu. Vypočtete: a) poloměr kružnice, která je řezem; b) poměr, ve kterém rovina řezu dělí výšku.



$$V_1 = V_2 = \frac{1}{2}V$$

$$V = \frac{1}{3}\pi v(r_1^2 + r_1r_2 + r_2^2)$$

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot 6(16 + 8 + 4) = 56\pi$$



$$V_1 = \frac{1}{3} \pi v_1 (r^2 + 2r + 4) = \frac{1}{2} 56\pi = 28\pi$$

$$\frac{6}{2} = \frac{v_1}{x} \quad \wedge r = x + 2 \quad \Rightarrow 3 \cdot (r - 2) = v_1$$

$$\frac{1}{3} \pi \cdot 3 \cdot (r - 2)(r^2 + 2r + 4) = 28\pi$$

$$r^3 + 2r^2 + 4r - 2r^2 - 4r - 8 = 28$$

$$r^3 = 36$$

$$r = \sqrt[3]{36}$$

$$\text{poměr: } \frac{v_1}{6 - v_1} = \frac{3 \cdot (\sqrt[3]{36} - 2)}{6 - (3 \cdot \sqrt[3]{36} - 6)} = \frac{\sqrt[3]{36} - 2}{4 - \sqrt[3]{36}}$$

Poloměr kružnice řezu má velikost $\sqrt[3]{36} \text{ cm}$ a hledaný poměr výšek je $(\sqrt[3]{36} - 2) : (4 - \sqrt[3]{36})$.

Příklady

1. Pravidelný komolý čtyřboký jehlan má podstavné hrany délek 6 cm a 4 cm. Boční hrana svírá s rovinou podstavy úhel 60° . Vypočtěte objem a povrch komolého jehlanu.
2. Kužel má objem V . Body A, B, které dělí jeho výšku na tři stejné díly, vedeme roviny rovnoběžné s rovinou podstavy. Dostaneme tak tři tělesa. Vypočítejte, v jakém poměru jsou jejich objemy.

3. Vypočtete obsah pláště stínítka na lampičku, které má tvar komolého rotačního kužele. Poloměry podstav jsou 30 cm a 15 cm. Délka strany komolého kužele je 25 cm. Rozvineme-li stínítko do roviny, dostaneme výseč o poloměrech r_1, r_2 a středovém úhlu α . Určete r_1, r_2, α .
4. Vypočtete objem a povrch nádoby bez víka tvaru pravidelného komolého čtyřbokého jehlanu, jehož dolní podstavná hrana má délku $a = 24$ cm, horní podstavná hrana má délku $b = 56$ cm a boční hrana má délku $c = 36$ cm.
5. Rotační komolý kužel má poloměry podstav $r_1 = 17$ cm, $r_2 = 5$ cm a jeho strana má od roviny podstavy odchylku 60° . Určete jeho objem a povrch.

Úlohy na procvičování:

1. Určete hmotnost bronzového podstavce (hustota je $7,6 \text{ kg/dm}^3$), který má tvar komolého jehlanu s obdélníkovými podstavami a výškou 0,5 m. Rozměry dolní podstavy jsou 0,45 m a 0,6 m, rozměry horní podstavy jsou 0,3 m a 0,4 m.
2. V jakém poměru jsou objemy pravidelného čtyřbokého komolého jehlanu a komolého kužele do jehlanu vepsaného?
3. Otevřená nádoba z hliníkového plechu má tvar pravidelného čtyřbokého komolého jehlanu, jehož hrana horní podstavy má délku $a = 22 \text{ cm}$, hrana dolní podstavy délku $b = 10 \text{ cm}$ a tělesová výška $v = 80 \text{ mm}$. a) Jakou má hmotnost, je-li hmotnost 1 dm^2 plechu 13 g. b) Určete její objem.
4. Nádoba tvaru rotačního komolého kužele má poloměry podstav 4 dm, 3 dm a objem $148\pi \text{ dm}^3$. Jak je vysoká?

5. Papírové stínítko lampy má tvar pláště rotačního komolého kužele, jehož podstavy mají poloměry 15 cm, 9 cm a jehož strana $s = 18$ cm. Rozvineme-li stínítko do roviny, dostaneme výseč o poloměrech r_1 , r_2 a středovém úhlu α . Určete r_1, r_2, α .
6. Vědro má tvar rotačního komolého kužele o průměrech podstav 180 mm a 360 mm. Výška vědra je 340 mm. Kolik litrů vody se do ní vejde?
7. Rotační komolý kužel má podstavy o poloměrech 6 cm a 3 cm. Vypočtete jeho objem, rovná-li se jeho plášť součtu obsahů obou podstav.
8. Rotační komolý kužel má povrch $2450\pi \text{ cm}^2$ a poloměry podstav 28 cm a 21 cm. Jak velká je jeho tělesová výška?
9. Komín tvaru dutého komolého rotačního kužele má výšku 32 m, dolní průměry 3,2 m a 2 m, horní průměry 1,7 m a 1,2 m. Jaká je jeho celková hmotnost, je-li hustota zdiva 1600 kg/m^3 ?
10. Pravidelný šestiboký komolý jehlan má podstavné hrany 65 cm, 25 cm a boční hranu 85 cm. Vypočtete objem tělesa.

11. Jáma má tvar pravidelného komolého čtyřbokého jehlanu. Hrany podstav jsou 14 m a 10 m. Boční stěny mají sklon 45° . Kolik m^3 zeminy bylo vykopáno?
12. Komolý pravidelný čtyřboký jehlan má objem 1281 cm^3 , výšku 7 cm a dolní podstavu o 81 cm^2 větší než horní podstavu. Určete velikost horní podstavu.
13. Podstavy čtyřbokého komolého jehlanu se shodnými pobočnými hranami jsou obdélníky. Rozměry jednoho obdélníku jsou 54 cm, 30 cm a obvod druhého obdélníku je 112 cm. Vzdálenost podstav je 12 cm. Vypočtete objem tělesa.
14. Pravidelný čtyřboký komolý jehlan má podstavné hrany 8 cm, 2 cm a výšku 12 cm. Určete objem jehlanu jemu podobného, je-li povrch podobného jehlanu čtyřikrát větší.

15. Určete hmotnost železného komolého rotačního kužele, jsou-li poloměry podstav 4 cm a 1,5 cm a určuje-li jeho strana s rovinou podstavy odchylku $\alpha = 28^\circ 26'$. ($\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$)
16. Určete povrch a objem komolého rotačního kužele, jehož jedna podstava má poloměr 35 cm, odchylka strany od roviny podstavy je 60° a druhá podstava má poloměr rovný délce strany kužele.
17. Rotační komolý kužel má objem $V = 1596\pi \sqrt{3} \text{ cm}^3$. Jeho strana o délce 24 cm určuje s rovinou podstavy odchylku 60° . Určete poloměry obou podstav.
18. Komolý rotační kužel má podstavy o poloměrech 8 cm, 4 cm a výšku 5 cm. Jaký je objem kužele, z něhož komolý kužel vznikl?
19. Komolý rotační kužel o poloměrech 10 cm, 4 cm a výšce 27 cm byl rozdělen dvěma rovinami rovnoběžnými s podstavami na tři části stejných výšek. Vypočítejte objemy vzniklých částí.
20. Povrch komolého rotačního kužele o straně 13 cm je $510\pi \text{ cm}^2$. Určete poloměry podstav, je-li jejich rozdíl 10 cm.

Výsledky:

- 1.** 722 kg; **2.** 4π ; **3.** a) 96,2 g; b) 2144 cm³; **4.** 12 dm; **5.** 27 cm, 45 cm, $\alpha = 120^\circ$; **6.** 20,188 l;
- 7.** $84\pi \text{ cm}^3$; **8.** 24 cm; **9.** 144 t; **10.** 420563,6 cm³; **11.** 290,7 m³; **12.** 144 cm²; **13.** 13680 cm³;
- 14.** 2688 cm³; **15.** 268,12 g; **16.** 9834,93 cm²; 54724,678 cm³; **17.** 17 cm, 5 cm;
- 18.** $\frac{640}{3}\pi \text{ cm}^3$;
- 19.** $228\pi \text{ cm}^3$, $444\pi \text{ cm}^3$, $732\pi \text{ cm}^3$; **20.** 15 cm, 5 cm

Procvičování:

Sbírka úloh z M pro OA a SOŠ, J. Klodner, str. 96, př. 12-14; str. 97, př. 11-15