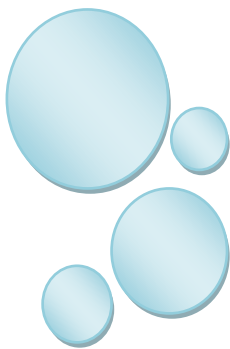


Funkce



RNDR. Yvetta Bartáková

Gymnázium, SOŠ a VOŠ
Ledeč nad Sázavou



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



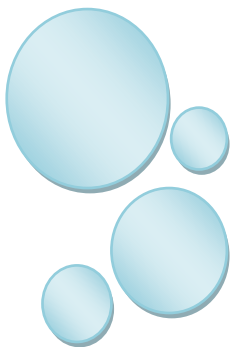
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Derivace funkce



Gymnázium, SOŠ a VOŠ
Ledeč nad Sázavou

VY_32_INOVACE_05_2_20_M2



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Definice

Mějme funkci f definovanou v okolí bodu x_0 . Existuje-li $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, nazýváme ji derivací funkce f v bodě x_0 . Zapisujeme: $f'(x_0)$.

Geometrický význam derivace funkce v bodě: První derivace je směrnici tečny t ke grafu funkce f v bodě x_0 . Tečna v bodě $T[x_0; y_0]$ má rovnici:

$$y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

Platí:

- Má-li funkce f v bodě x_0 derivaci, je v tomto bodě spojitá.
- Jestliže funkce f a g mají v bodě x_0 derivaci, má v tomto bodě derivaci i součet, rozdíl, součin a podíl funkcí a platí:

a) $(f + g)' = f' + g'$

b) $(f - g)' = f' - g'$

c) $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$

d) $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2} \wedge g(x) \neq 0$

e) $(c \cdot f)' = c \cdot f' \wedge c \in \mathbb{R}$

- Jestliže funkce $v = g(x)$ má v bodě x_0 derivaci a $y = f(v)$ má derivaci v bodě $v_0 = g(x_0)$, pak má složená funkce $y = f(g(x))$ derivaci v bodě x_0 a platí :
 $[f(g(x_0))]' = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$.

Derivace elementárních funkcí

Funkce	Derivace funkce	Definiční obor funkce
$y = c, c \in \mathbb{R}$	$y' = 0$	$x \in \mathbb{R}$
$y = x^n, n \in \mathbb{N}$	$y' = n \cdot x^{n-1}$	$x \in \mathbb{R}$
$y = x^k, k \in \mathbb{Z}$	$y' = k \cdot x^{k-1}$	$x \in \mathbb{R} - \{0\}$
$y = x^r, r \in \mathbb{R}$	$y' = r \cdot x^{r-1}$	$x \in \mathbb{R}^+$
$y = e^x$	$y' = e^x$	$x \in \mathbb{R}$
$y = a^x, a > 0, a \neq 1$	$y' = a^x \cdot \ln a$	$x \in \mathbb{R}$
$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$	$x \in \mathbb{R}^+$
$y = \log_a x, a > 0, a \neq 1$	$y' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$	$x \in \mathbb{R}^+$

$y = \sin x$	$y' = \cos x$	$x \in \mathbb{R}$
$y = \cos x$	$y' = -\sin x$	$x \in \mathbb{R}$
$y = \operatorname{tg} x$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$x \in \mathbb{R} - \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$
$y = \operatorname{cotg} x$	$y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$x \in \mathbb{R} - \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{k\pi\}$

Příklad 1

Vypočtěte derivace zadaných funkcí v libovolném bodě jejich definičního oboru.

a) $y = 2x \cdot \cos x$

Využijeme větu o derivaci součinu.

$$y' = 2 \cdot \cos x + 2x \cdot (-\sin x) = 2 \cdot (\cos x - x \cdot \sin x)$$

b) $y = \frac{\sin x}{3x}$

Využijeme větu o derivaci podílu.

$$y' = \frac{\cos x \cdot 3x - \sin x \cdot 3}{9x^2} = \frac{3 \cdot (x \cdot \cos x - \sin x)}{9x^2} = \frac{x \cdot \cos x - \sin x}{3x^2}$$

c) $y = \ln(3 - 2x)$

Využijeme větu o derivaci složené funkce.

$$y' = \frac{1}{3-2x} \cdot (-2) = \frac{2}{2x-3}$$

d) $y = \frac{\sqrt{x}}{5}$

Funkci přepíšeme do tvaru $y = \frac{1}{5}x^{\frac{1}{2}}$ a využijeme větu o derivaci mocninné funkce.

$$y' = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{10\sqrt{x}}$$

e) $y = \log_3 x^2$

Využijeme větu o derivaci složené funkce.

$$y' = \frac{1}{x^2 \ln 3} \cdot 2x = \frac{2}{x \ln 3}$$

Užití derivací:

- při vyšetřování průběhu funkcí
- výpočtu některých limit funkcí
- určování extrémních obvodů a obsahů rovinných útvarů nebo objemů a povrchů těles

Při vyšetřování průběhu funkcí platí věty:

- a) Má-li funkce f v každém bodě intervalu (a,b) kladnou derivaci, je v tomto intervalu rostoucí.

- b) Má-li funkce f v každém bodě intervalu (a,b) zápornou derivaci, je v tomto intervalu klesající.

- c) Má-li funkce f v bodě x_0 lokální extrém a existuje-li v tomto bodě derivace $f'(x_0)$, pak platí: $f'(x_0) = 0$.

d) Jestliže v každém bodě x intervalu (a,b) platí, že $f''(x_0) > 0$, pak je funkce f v intervalu (a,b) konvexní.

e) Jestliže v každém bodě x intervalu (a,b) platí, že $f''(x_0) < 0$, pak je funkce f v intervalu (a,b) konkávní.

f) Necht' funkce f má v bodě x_0 derivaci. Mění-li se v tomto bodě znaménko druhé derivace, nazýváme bod x_0 inflexní bod funkce f .

Příklad 2

Napište rovnici tečny a normály ke křivce $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 5$ v bodě $T[2,1]$.

Vypočteme 1. derivaci funkce: $y' = \frac{1}{2} \cdot 2x - 3 = x - 3$

1. derivace v dotykovém bodě je směrnici tečny: $y'(2) = 2 - 3 = -1 = k_t$

2. pro směrnici normály platí: $k_n = -\frac{1}{k_t} \Rightarrow k_n = 1$

Tečna t : $y - 1 = -1(x - 2)$
 $y = -x + 3$

Normála n : $y - 1 = 1(x - 2)$
 $y = x - 1$

Příklad 3

Určete monotónnost a extrémy funkce $f: y = x^3 + \frac{x^4}{4}$.

Vypočteme 1. derivaci funkce: $y' = 3x^2 + \frac{1}{4} \cdot 4x^3 = 3x^2 + x^3 = x^2(3 + x)$

1. první derivace nabývá nezáporných hodnot pro $x \in \langle -3; \infty \rangle$, proto v tomto intervalu roste
2. první derivace nabývá záporných hodnot pro $x \in (-\infty; -3)$, je spojitá v bodě -3 , proto pro $x \in (-\infty; -3)$ funkce klesá
3. body podezřelé z extrému jsou 0 a -3 , ale znaménková změna nastává pouze u bodu -3 z minus na plus, proto má funkce v bodě $[-3; -6,75]$ lokální minimum

Příklady

- 1) Vypočtěte hodnotu derivace funkce $f : y = x^2 - 2x + 1$ pro $x = -2; -1; 0; 1; 2$.
- 2) Vypočtěte hodnotu derivace funkce f v průsečících jejího graf s osou x .

a) $f : y = x^2 + x - 6$

b) $f : y = \frac{x^2 - 1}{x + 2}$

c) $f : y = \frac{x^2 + 5x + 6}{x}$

3) Vypočtěte hodnotu derivace funkce f v daných bodech.

a) $f : y = \frac{x-1}{x^2}; x = 1; 0; -1$

b) $f : y = \frac{x^2 + 2x - 3}{x}; x = 2; -1; -4$

c) $f : y = \frac{\sin x}{x}; x = \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}$

d) $f : y = \sin x + \cos x; x = \frac{\pi}{3}; \frac{3\pi}{2}$

4) Najděte rovnici tečny a normály funkce f v bodech, které mají danou souřadnici x .

a) $f : y = x^3; x = 2; x = -1$

b) $f : y = \frac{x-1}{x+1}; x = 1; x = 3$

c) $f : y = \sin 2x; x = \frac{\pi}{3}; x = \frac{3\pi}{4}$

5) Vypočtěte úhel, který svírají tečny funkce f v bodech, které mají danou souřadnici x .

a) $f : y = x^2 + 2x - 3; x_1 = -3; x_2 = 1$

b) $f : y = \frac{x^2 - 3}{x - 1}; x_1 = 0; x_2 = 2$

c) $f : y = \frac{x}{x^2 - 1}; x_1 = -2; x_2 = -4$

6) Najděte rovnice tečen funkce f , které s osou x svírají úhel α .

a) $f : y = \frac{x}{x+1}; \alpha = \frac{\pi}{4}$

b) $f : y = \frac{x+2}{x}; \alpha = \frac{3\pi}{4}$

7) Vypočtěte derivaci funkce:

a) $y = (x^2 - 3x + 1)^3$

b) $y = (x^2 - 1)^3 \cdot (x^3 + 2)^2$

c) $y = (2x^2 + 1) \cdot \sqrt{x^2 - 1}$

d) $y = \frac{(x^2 - x + 1)^2}{\sqrt{2x + 1}}$

8) U daných funkcí určete monotónnost a extrémy.

a) $y = 3x^2 - 2x + 5$

b) $y = -2x^2 - 4x - 1$

c) $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$

e) $y = \sin 2x; x \in \langle 0; 2\pi \rangle$

d) $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$

f) $y = \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right); x \in \langle 0; \pi \rangle$

Příklady na procvičení:

Vypočtete derivaci funkce:

Př. 1. $y = (1 - x)^3$

Př. 2. $y = (x^3 - 2)^5$

Př. 3. $y = (x^4 - 6x^2 + 7)^3$

Př. 4. $y = (x - 1)(x - 2)^2(x - 3)$

Př. 5. $y = \frac{1}{a^2 - x^2}$

Př. 6. $y = \frac{1}{(5-x)^2}$

Př. 7. $y = \sqrt{1+x^2}$

Př. 8. $y = \sqrt{a^2 - x^2}$

Př. 9. $y = x\sqrt{1+x^2}$

Př. 10. $y = (x - \sqrt{1-x^2})^2$

Př. 11. $y = \frac{x^2 + 1}{(1 - x)^2}$

Př. 12. $y = \frac{x}{\sqrt{x^2 + a}}, a > 0$

Př. 13. $y = \frac{1}{x + \sqrt{a^2 + x^2}}, a \neq 0$

Př. 14. $y = (x + 1)\sqrt{x^2 + 1}$

Př. 15. $y = \sqrt{x + \sqrt{x}}$

Př. 16. $y = e^{\frac{1}{\ln x}}$

Př. 17. $y = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$

Př. 18. $y = \ln(x \cdot \sin x \cdot \sqrt{1 - x^2})$

Př. 19. $y = \ln \sqrt{\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}}$

Př. 20. $y = \frac{1}{3} \ln^3 x^3$

Př. 21. $y = (3x^2 + 1)^2$

Př. 22. $y = (x^2 - 2x + 2)^3$

Př. 23. $y = (3x - 2)^2(x + 1)$

Př. 24. $y = x^{\sqrt{2}} \cdot \sin x$

Př. 25. $y = 3\cos^2 x - \cos^3 x$

Př. 26. $y = \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{1}{6}\sin^6 3x$

Př. 27. $y = \cos x \sqrt{1 + \sin^3 x}$

Př. 28. $y = \frac{1}{18} \sin^6 3x - \frac{1}{24} \sin^8 3x$

Př. 29. $y = \frac{x+1}{x-1}$

Př. 30. $y = \frac{x^2 + x - 2}{x + 3}$

Př. 31. $y = \frac{x^3 + x}{1 - x^3}$

Př. 32. $y = \frac{1}{x^2 + 1}$

Př. 33. $y = 3\sqrt{x} - \frac{2}{x^3} + \frac{\sqrt{x}}{x}$

Př. 34. $y = \frac{1}{\sqrt{x}} - 3\sqrt{x} + 2x$

Př. 35. $y = \frac{1}{\sqrt{x} + 1}$

Př. 36. $y = \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} - 1}{x}$

Př. 37. $y = x\sqrt[3]{x} - \frac{4x}{\sqrt{x}} + \sqrt{x\sqrt{x}}$

Př. 38. $y = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$

Př. 39. $y = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} + \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$

Př. 40. $y = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{5}$

Př. 41. $y = (x^3 - x + 1)^4$

Př. 42. $y = \frac{x}{x^2+1}$

Př. 43. $y = (x^3 - 1)^5 \cdot (x^2 + 1)^6$

Př. 44. $y = \frac{(x^2 + 1)^5 + 1}{(x^2 + 1)^5 - 1}$

Př. 45. $y = \sqrt{x^3 - 1}$

Př. 46. $y = \sqrt{x + 1}$

Př. 47. $y = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

Př. 48. $y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$

Př. 49. $y = \sqrt{1 + \sqrt{x}}$

Př. 50. $y = \sqrt{x + \sqrt{1 + x^2}}$

Př. 51. $y = \frac{\sqrt{x^2 + 1} + 1}{\sqrt{x^2 + 1} - 1}$

Př. 52. $y = \sqrt{x + \sqrt{2}}$

Př. 53. Určete rovnice tečen ke křivce $y = x^3 + x^2 - 2x$ v průsečících křivky s osou x .

Př. 54. Ve kterém bodě má parabola $y = 2x^2 + 3x - 1$ tečnu

- a) se směrovým úhlem $\varphi = 45^\circ$;
- b) rovnoběžnou s přímkou $5x - y + 3 = 0$;
- c) kolmou na přímkou $x - 3y + 2 = 0$.

Př. 55. Určete definiční obor daných funkcí a 1. derivaci :

a) $f : y = \sqrt{x}(2x^2 + 3x + 5)$

b) $g : y = \frac{2\sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}}$

c) $h : y = \frac{\cos x - 1}{\sin x}$

d) $k : y = \sqrt[3]{x^2 - 1}$

e) $l : y = \sin(x^2 - 1)$

Př. 56. Najděte rovnici tečny elipsy $x^2 + 4y^2 = 16$ v bodě $T[2; -\sqrt{3}]$.

Př. 57. Určete rovnice tečen ke křivce $y = x^3 + x^2 - 6x$ v průsečících křivky s osou x .

Př. 58. Je dána parabola $y = x^2 - 4x + 3$.

a) Určete dotykový bod a rovnici tečny paraboly, která má směrový úhel $\varphi = 45^\circ$.

.

b) Pomocí derivace určete vrchol paraboly.

Př. 59. Je dána parabola $y = 0,5x^2 + 3x + 1$.

- a) Určete rovnici tečny paraboly v bodě $T[-2; ?]$.
- b) Ve kterém bodě má parabola tečnu se směrovým úhlem $\varphi = 60^\circ$?
- c) Ve kterém bodě má parabola tečnu rovnoběžnou s přímkou $5x - y - 2 = 0$?

Př. 60. Určete rovnici tečny grafu funkce $f : y = \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4}$ v bodě $T[1; ?]$.

Př. 61. Určete derivaci funkce v libovolném bodě intervalů, z nichž se skládá definiční obor:

a) $f : y = \sqrt[3]{x}(2x^2 + 1)$

b) $g : y = \frac{1+x}{\sqrt{x}}$

c) $h : y = \frac{1+\cos x}{1-\cos x}$

d) $k : y = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

e) $l : y = \sqrt{\sin x}$

f) $m : y = \sin \sqrt{x}$

Př. 62. Napište rovnici tečny hyperboly $x^2 - 9y^2 = 9$ v bodě $T[9; -2\sqrt{2}]$.

Př. 63. Určete rovnici tečny křivky $x^2 + y^2 - 6x - 2y - 15 = 0$ v bodě $T[-1; -2]$.

Př. 64. Určete rovnici tečny grafu funkce $f : y = \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$ v bodě $T\left[\frac{\pi}{4}; ?\right]$.

Výsledky:

1. $-3(1-x)^2$; **2.** $15x^2(x^3-2)^4$; **3.** $12x(x^2-3)(x^4-6x^2+7)^2$;

4. $2(x-2)(2x^2-8x+7)$; **5.** $\frac{2x}{(a^2-x^2)^2}$; **6.** $\frac{2}{(5-x)^3}$; **7.** $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$; **8.** $\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}}$; **9.** $\frac{2x^2+1}{\sqrt{1+x^2}}$;

10. $\frac{2(2x^2-1)}{\sqrt{1-x^2}}$; **11.** $\frac{2(x+1)}{(1-x)^3}$; **12.** $\frac{a}{\sqrt{(x^2+a)^3}}$; **13.** $\frac{-1}{(x+\sqrt{a^2+x^2})\sqrt{a^2+x^2}}$;

14. $\frac{2x^2+x+1}{\sqrt{x^2+1}}$; **15.** $\frac{2\sqrt{x}+1}{4\sqrt{x}\cdot\sqrt{x+\sqrt{x}}}$; **16.** $\frac{-e^{\frac{1}{\ln x}}}{x\cdot\ln^2 x}$; **17.** $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$; **18.** $\frac{1}{x} + \cot gx - \frac{x}{1-x^2}$;

19. $\frac{-1}{\cos x}$; **20.** $\frac{3\ln^2 x^3}{x}$; **21.** $12x(3x^2+1)$; **22.** $6(x-1)(x^2-2x+2)^2$; **23.** $(3x-2)(9x+4)$;

24. $x^{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{2}}{x}\sin x + \cos x\right)$; **25.** $3\sin x \cos x(\cos x-2)$; **26.** $\sin^2 x \cos x - 3\sin^5 3x \cdot \cos 3x$;

$$\begin{aligned}
& \text{27. } \frac{-\sin x(5\sin^3 x - 3\sin x + 2)}{2\sqrt{1+\sin^3 x}} ; \text{28. } \sin^5 3x \cdot \cos^3 3x ; \text{29. } \frac{-2}{(x-1)^2} ; \text{30. } \frac{x^2+6x+5}{(x+3)^2} ; \\
& \text{31. } \frac{2x^3+3x^2+1}{(1-x^3)^2} ; \text{32. } \frac{-2x}{(x^2+1)^2} ; \text{33. } \frac{3}{2\sqrt{x}} + \frac{6}{x^4} - \frac{1}{2x\sqrt{x}} ; \text{34. } \frac{-1}{2x\sqrt{x}} - \frac{3}{2\sqrt{x}} + 2 ; \\
& \text{35. } \frac{-1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^2} ; \text{36. } \frac{-1}{2x\sqrt{x}} - \frac{2}{3x\sqrt[3]{x^2}} + \frac{1}{x^2} ; \text{37. } \frac{4\sqrt[3]{x}}{3} - \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{3}{4\sqrt[4]{x}} ; \text{38. } \frac{-1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)^2} ; \\
& \text{39. } \frac{1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^2} - \frac{1}{2x\sqrt{x}} ; \text{40. } \frac{-1}{2x\sqrt{x}} ; \text{41. } 4(3x^2-1)(x^3-x+1)^3 ; \text{42. } \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} ; \\
& \text{43. } 3x(x^3-1)^4(x^2+1)^5(9x^3+5x-4) ; \text{44. } \frac{-20x(x^2+1)^4}{[(x^2+1)^5-1]^2} ; \text{45. } \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3-1}} ; \text{46. } \frac{1}{2\sqrt{x+1}} ; \\
& \text{47. } \frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}} ; \text{48. } \frac{-bx}{a\sqrt{a^2-x^2}} ; \text{49. } \frac{1}{4\sqrt{x} \cdot \sqrt{1+\sqrt{x}}} ; \text{50. } \frac{\sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}}{2\sqrt{1+x^2}} ;
\end{aligned}$$

$$51. \frac{-2x}{\sqrt{x^2+1} \cdot (\sqrt{x^2+1}-1)^2}; \quad 52. \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{2}}};$$

$$53. t_1: 2x+y=0; t_2: 6x-y+12=0; t_3: 3x-y-3=0;$$

$$54. a) T\left[-\frac{1}{2}, -2\right]; b) T\left[\frac{1}{2}, 1\right]; c) T\left[-\frac{3}{2}, -1\right];$$

$$55. a) Df = R_0^+, y' = \frac{10x^2+9x+5}{2\sqrt{x}}; b) Df = R_0^+ - \{1\}, y' = \frac{1}{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})^2};$$

$$c) Df = R - \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{k\pi\}, y' = \frac{-1}{1+\cos x}; d) Df = R, y' = \frac{2x\sqrt[3]{x^2-1}}{3(x^2-1)}; e) Df = \langle -\sqrt{2}, \sqrt{2} \rangle, y' = 2x \cdot \cos(x^2-1)$$

$$56. t: x-2\sqrt{3}y-8=0; \quad 57. t_1: 6x+y=0; t_2: 15x-y+45=0; t_3: 10x-y-20=0; \quad 58.$$

$$a) T\left[\frac{5}{2}, -\frac{3}{4}\right], t: 4x-4y-13=0; b) V[2, -1]; \quad 59. a) x-y-1=0, b) T[\sqrt{3}-3, -2]; c) T[2, 9];$$

60. $2x - 9y + 1 = 0$; 61. a) $\frac{\sqrt[3]{x}(14x^2 + 1)}{3x}$, b) $\frac{(x-1)\sqrt{x}}{2x^2}$, c) $\frac{-2\sin x}{(1-\cos x)^2}$, d) $\sqrt{\frac{-x}{(1+x^2)^3}}$,
 e) $\frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$, f) $\frac{\cos \sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$; 62. $x + 2\sqrt{2}y - 1 = 0$; 63. $4x + 3y + 10 = 0$; 64. $x - y - \frac{\pi}{4} = 0$

Procvičování:

Maturitní minimum – sbírka úloh pro SŠ, Prometheus, str. 127-131, př. 3.1-8.8