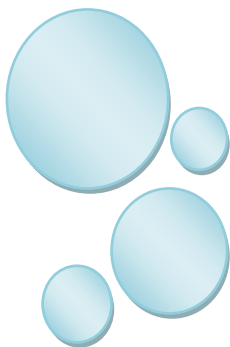


Funkce



RNDr. Yvetta Bartáková

Gymnázium, SOŠ a VOŠ
Ledeč nad Sázavou



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



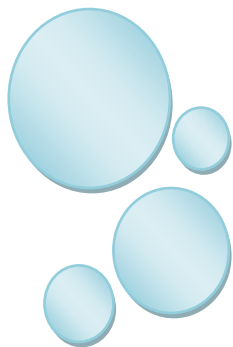
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Nekonečná geometrická řada



VY_32_INOVACE_05_2_17_M2

Gymnázium, SOŠ a VOŠ
Ledeč nad Sázavou



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Definice

Je-li posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ geometrická s kvocientem q , nazýváme nekonečnou řadu $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots + \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \right)$ nekonečná geometrická řada s kvocientem q .

Nekonečná geometrická řada, pro kterou $a_1 \neq 0$, je konvergentní, právě když pro její kvocient q platí: $|q| < 1$. Její součet je $s = \frac{a_1}{1-q}$.

Poznámka: Nekonečná řada je divergentní, jestliže posloupnost součtů je divergentní.

Příklad 1

Určete kvocient nekonečné geometrické řady $-\frac{1}{3} + \frac{1}{6} - \frac{1}{12} + \frac{1}{24} - \dots$

Rozhodněte, zda řada je konvergentní či divergentní. V případě konvergentní řady určete její součet.

Určíme q :
$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{\frac{1}{6}}{-\frac{1}{3}} = -\frac{1}{2}$$

Podmínka konvergence: $|q| < 1$

V našem příkladě $\left| -\frac{1}{2} \right| < 1$, podmínka je tedy splněna a řada je konvergentní.

Vypočteme s:
$$s = \frac{a_1}{1-q} = \frac{-\frac{1}{3}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{-\frac{1}{3}}{\frac{3}{2}} = -\frac{2}{9}$$

Příklad 2

Určete, pro která x je daná řada konvergentní, a pak vypočtete její součet.

$$x + 4 + (x + 4)^2 + (x + 4)^3 + \dots$$

Určíme q : $q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{(x + 4)^2}{x + 4} = x + 4$

Podmínka konvergence: $|q| < 1$

V našem příkladě $|x + 4| < 1$, což je splněno pro $x \in (-5, -3)$.

Vypočteme s : $s = \frac{a_1}{1 - q} = \frac{x + 4}{1 - (x + 4)} = \frac{x + 4}{-x - 3} = -\frac{x + 4}{x + 3}$

Příklad 3

Řešte rovnici s neznámou $x \in \mathbb{R} : 1 + \log x + (1 + \log x)^2 + (1 + \log x)^3 + \dots = -6 \cdot \log x$

Levá strana rovnice je nekonečná řada. Určíme q : $q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{(1 + \log x)^2}{1 + \log x} = 1 + \log x$

Podmínka konvergence: $|q| < 1$

V našem případě $|\log x + 1| < 1$, což je splněno pro $\log x \in (-2, 0)$ a $x \in (0, 01; 1)$

Vypočteme s : $s = \frac{a_1}{1 - q} = \frac{1 + \log x}{1 - (1 + \log x)} = \frac{1 + \log x}{-\log x}$

Určený součet dosadíme na levou stranu rovnice a dopočteme.

$$\frac{1 + \log x}{-\log x} = -6 \log x$$

$$1 + \log x = 6 \log^2 x$$

$$0 = 6 \log^2 x - \log x - 1$$

$$\log x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{12} = \frac{1 \pm 5}{12}$$

$$\log x_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow x_1 = \sqrt{10}$$

$$\log x_2 = -\frac{1}{3} \Rightarrow x_2 = \frac{1}{\sqrt[3]{10}}$$

Podmínky konvergence vyhovuje pouze x_2 .

$$K = \left\{ \frac{1}{\sqrt[3]{10}} \right\}$$

Příklad 4

Zadané periodické číslo $0,\bar{7}$ napište jako zlomek s celočíselným čitatelem i jmenovatelem.

$$0,\bar{7} = \frac{7}{10} + \frac{7}{100} + \frac{7}{1000} + \dots$$

Určíme q : $q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{\frac{7}{100}}{\frac{7}{10}} = \frac{1}{10}$

Podmínka konvergence: $|q| < 1$

V našem příkladu $\left|\frac{1}{10}\right| < 1$, podmínka je tedy splněna a řada je konvergentní.

Vypočteme s:
$$s = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{7}{10}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{\frac{7}{10}}{\frac{9}{10}} = \frac{7}{9}$$

Závěr: $0,\bar{7} = \frac{7}{9}$

Příklad 5

„Nekonečná“ spirála se skládá z půlkružnic, poloměr první půlkružnice je 6 cm, poloměr každé další půlkružnice je o jednu třetinu menší než poloměr půlkružnice předcházející. Vypočtěte délku spirály.

Délky půlkružnic tvoří řadu: $\frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot 6, \frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot \frac{2}{3} \cdot 6, \frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot \frac{2}{3} \cdot 4, \dots$

Určíme q : $q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{4\pi}{6\pi} = \frac{2}{3}$

Podmínka konvergence: $|q| < 1$ je splněna.

Vypočteme s : $s = \frac{a_1}{1-q} = \frac{6\pi}{1-\frac{2}{3}} = \frac{6\pi}{\frac{1}{3}} = 18\pi$

Délka spirály je 18π .

Příklady

Př. 6. U daných nekonečných geometrických řad určete kvocient a rozhodněte, které z řad jsou konvergentní či divergentní. V případě konvergentní řady určete její součet.

a) $\frac{3}{2} + \frac{3}{4} + \frac{3}{8} + \frac{3}{16} + \dots$

b) $\sqrt{2} + 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} + \dots$

c) $2 + 3 + \frac{9}{2} + \frac{27}{4} + \dots$

Př. 7. Určete, pro která x jsou konvergentní dané nekonečné geometrické řady, a pak vypočtěte součet.

a) $2 + 4x + 8x^2 + 16x^3 + \dots$

b) $x + 2x + 4x + 8x + \dots$

c) $1 - 2x + (1 - 2x)^2 + (1 - 2x)^3 + \dots$

Př. 8. Řešte rovnice s neznámou $x \in \mathbb{R}$:

a) $(x+1) \cdot \sum_{i=1}^{\infty} (x+2)^i = \frac{3x+2}{5}$

b) $2 \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{x^{2i}} = \frac{x}{x+1} - \frac{x-2}{x-1}$

c) $\sum_{i=1}^{\infty} (3\log_2 x - 2)^i = \frac{1}{3}$

d) $\sum_{i=1}^{\infty} (1 - 2\cos^2 x)^i = \operatorname{tg} x$

Př. 9. Zadaná periodická čísla napište jako zlomek v základním tvaru.

a) $0,\overline{8}$

b) $1,0\overline{32}$

c) $0,\overline{370}$

Př. 10. „Nekonečná“ spirála se skládá z polokružnic, poloměr první polokružnice je 6 cm, poloměr každé další polokružnice je třikrát menší než poloměr polokružnice předcházející. Vypočtete délku spirály.

Př. 11. Ve čtverci ABCD , kde $|AB| = 6\text{cm}$ postupně vyznačte „nekonečnou“ lomenou čáru spojením následujících bodů: $ABS_1S_2S_3S_4\ldots$ a vypočtete její délku, jestliže S_1 je střed BC, S_2 je střed AC, S_3 je střed AB, S_4 je střed BS_1 , S_5 je střed S_1S_3 , S_6 je střed BS_3 , S_7 je střed BS_4 , S_8 je střed S_4S_6 , S_9 je střed S_6B atd.

Př. 12. V krychli ABCDEFGH o hraně 6 cm označte postupně A_1, B_1, C_1, D_1 středy hran EF, FG, GH, HE. Čtverec $A_1B_1C_1D_1$ tvoří podstavu další krychle $A_1B_1C_1D_1E_1F_1G_1H_1$, která je postavená na původní krychli. Označte postupně A_2, B_2, C_2, D_2 středy hran $E_1F_1, F_1G_1, G_1H_1, H_1E_1$. Čtverec $A_2B_2C_2D_2$ tvoří podstavu další krychle, která je postavena na předchozí krychli. Tento postup stále opakujeme. Vypočtete objem „nekonečné“ pyramidy, která takto vznikne.

Procvičování:

1. Maturitní minimum – sbírka úloh pro SŠ, Prometheus, str.92-93, př.5.1-5.6
2. Sběrka úloh z M pro SOŠ, SOU a nástavbové studium, Hudcová – Kubíčková, Prométheus,
str. 290-294, př. 74-97