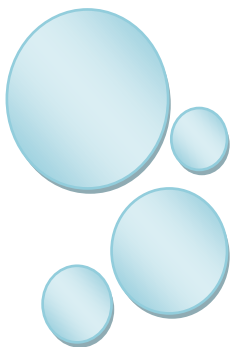


Funkce



Mgr. Jaroslava Vrbková

Gymnázium, SOŠ a VOŠ
Ledeč nad Sázavou



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



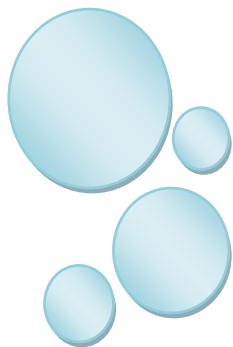
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Geometrická posloupnost



VY_32_INOVACE_05_2_16_M2

Gymnázium, SOŠ a VOŠ
Ledeč nad Sázavou



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Geometrická posloupnost

Definice geometrické posloupnosti:

Posloupnost se nazývá **geometrická**, jestliže existuje reálné číslo q různé od nuly takové, že pro všechna celá kladná čísla n platí: $a_{n+1} = a_n \cdot q$, kde q je kvocient geometrické posloupnosti.

- Geometrická posloupnost je jednoznačně určena prvním členem a kvocientem.
- Libovolný člen geometrické posloupnosti s výjimkou prvního a posledního lze určit jako geometrický průměr předcházejícího a následujícího členu.

$$a_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}$$

Vzorce pro počítání s geometrickou posloupností:

$$a_{n+1} = a_n \cdot q$$

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

$$a_r = a_s \cdot q^{r-s}$$

$s_n = n \cdot a_1$... součet prvních n členů, jeli $q = 1$.

$s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$ součet prvních n členů pokud se $q \neq 1$.

Vzorec je možné snadno interpretovat slovně: určitý člen v posloupnosti vypočtu z libovolného předchozího tak, že ho vynásobím kvocientem tolikrát, o kolik je jeho index větší. (při výpočtu z libovolného následujícího, kvocientem dělím).

Př. Vypočtěte prvních šest členů geometrické posloupnosti, jestliže platí:

$$a_1 - a_2 + a_3 = 9$$

$$a_4 - a_5 + a_6 = 72$$

$$a_1 - a_1q + a_1q^2 = 9$$

$$a_1q^3 - a_1q^4 + a_1q^5 = 72$$

$$a_1(1 - q + q^2) = 9$$

$$a_1q^3(1 - q + q^2) = 72$$

$$\frac{a_1q^3(1 - q + q^2)}{a_1(1 - q + q^2)} = \frac{72}{9}$$

$$q^3 = 8$$

$$q = \sqrt[3]{8}$$

$$q = 2$$

$$a_1 = \frac{9}{1-q+q^2}$$

$$a_1 = \frac{9}{1-2+4}$$

$$a_1 = 3$$

$$\{a_n\}_{n=1}^6 = 3; 6; 12; 24; 48; 96$$

Př. Vypočítejte prvních šest členů geometrické posloupnosti, jestliže platí $a_3 = 8$ a $a_7 = 128$.

$$a_r = a_s q^{r-s}$$

$$a_7 = a_3 q^4$$

$$q^4 = \frac{a_7}{a_3}$$

$$q = \sqrt[4]{\frac{a_7}{a_3}}$$

$$q = \sqrt[4]{\frac{128}{8}}$$

$$q = \sqrt[4]{16}$$

$$q = 2$$

$$a_3 = a_1 q^2$$

$$a_1 = \frac{a_3}{q^2} = \frac{8}{2^2} = \frac{8}{4} = 2$$

$$q = 2$$

$$(a_n)_{n=1}^6 = 2; 4; 8; 16; 32; 64$$

Př. Určete první člen a kvocient geometrické posloupnosti, ve které platí

$$a_2 = 1,5; a_5 = 40,5.$$

$$a_5 = a_2 \cdot q^3$$

$$40,5 = 1,5 \cdot q^3$$

$$q^3 = \frac{40,5}{1,5}$$

$$q^3 = 27$$

$$q = \sqrt[3]{27} = 3$$

$$a_2 = a_1 \cdot q$$

$$1,5 = a_1 \cdot 3$$

$$a_1 = \frac{1,5}{3} = 0,5$$

$a_1 = 0,5$ a kvocient $q = 3$

Př. V geometrické posloupnosti je dáno: $a_3 = 18$, $a_5 = 162$. Určete součet prvních osmi členů.

$$\begin{array}{ll} a_5 = a_3 \cdot q^2 & a_3 = a_1 \cdot q^2 \\ 162 = 18 \cdot q^2 & 18 = a_1 \cdot 9 \end{array}$$

První posloupnost: $a_1 = 2$, $q = 3$

$$9 = q^2 \qquad a_1 = 2$$

Druhá posloupnost: $a_1 = 2$, $q = -3$

$$q = +3 \text{ nebo } -3$$

Součet prvních osmi členů určíme po dosazení do vzorce: $s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$

$$s_8 = 2 \frac{3^8 - 1}{3 - 1} = \underline{6\,560}$$

$$s_8 = 2 \frac{(-3)^8 - 1}{-3 - 1} = \underline{-3\,280}$$

PŘÍKLADY NA PROCVIČENÍ:

- Určete první člena kvocient geometrické posloupnosti, ve které platí:

a) $a_2 = 16$, $a_4 = 1$

b) $a_2 = 1,5$, $a_5 = 40,5$

c) $a_1 + a_2 - a_4 = -110$

$$a_2 + a_3 - a_5 = -220$$

d) $a_8 - a_4 = 360$

$$a_7 - a_5 = 144$$

$$\text{e) } a_2 - a_4 = 60$$

$$a_1 - a_3 = 15$$

$$\text{f) } a_3 - a_1 + 16 = 0$$

$$a_4 - a_2 + 48 = 0$$

- Určete n , je-li v geometrické posloupnosti dáno:

a) $a_n = 0,003$, $a_1 = 3$, $q = 0,1$

b) $a_n = 162$, $a_1 = 2$, $q = 3$

c) $a_n = 3\,125$, $a_1 = 32$, $q = 2,5$

d) $a_n = -32$, $a_1 = -1$, $q = \sqrt{2}$

- Mezi čísla $\frac{2}{3}$ a 162 vložte čtyři čísla tak, aby s danými tvořila geometrickou posloupnost.
- Mezi kořeny rovnice $2x^2 - 33x + 16 = 0$ vložte čtyři čísla tak, aby s kořeny rovnice tvořila rostoucí geometrickou posloupnost.
- Mezi kořeny kvadratické rovnice $x^2 - 10x + 16 = 0$ vložte čtyři čísla tak, aby spolu s vypočtenými kořeny vzniklo šest následujících členů geometrické posloupnosti.
- Délky hran kváдру tvoří tři po sobě jdoucí členy geometrické posloupnosti, součet délek všech hran kváдру je 84cm. Vypočítejte povrch kváдру, víte-li, že jeho objem je 64cm^3 .

Užití geometrické posloupnosti

Pravidelný růst:

$$a_n = a_0 \left(1 + \frac{p}{100} \right)^n$$

a_0 - počáteční hodnota, a_n - hodnota po n -obdobích, n - počet období

Pravidelný pokles:

$$a_n = a_0 \left(1 - \frac{p}{100} \right)^n$$

Př.

Ve městě každoročně přibývá průměrně 4,5% obyvatel. Za jak dlouho lze očekávat, že se počet obyvatel zvýší o 30%?

$$p = 4,5\% \quad a_n = 130\% \text{ z } a_0 = 1,3a_0$$

dosadíme do vzorce pro růst

$$a_n = a_0 \left(1 + \frac{p}{100} \right)^n, \quad 1,3a_0 = a_0 \cdot 1,045^n$$

n- získáme logaritmováním

$$\log 1,3 = \log 1,045^n$$

$$\log 1,3 = n \cdot \log 1,045$$

$$n = \frac{\log 1,045}{\log 1,3}$$

$$n = 5,96 \approx 6$$

Asi za šest let lze očekávat zvýšení počtu obyvatel o 30%.

PŘÍKLADY NA PROCVIČENÍ:

- Hodnota roční výroby podniku je 2 milióny Kč. Průměrný roční přírůstek činí 2%. Jaká bude hodnota výroby na konci pátého roku?
- Na vesnici každoročně průměrně ubývají 2% obyvatel. Kolik obyvatel bude mít vesnice za 4 roky, jestliže má nyní 540 obyvatel?
- Za kolik let klesne hodnota předmětu na méně než desetinu původní ceny, jestliže ročně odepisujeme 18% ceny předmětu z předchozího roku?

Úrokování vkladů :

$$I_n = I_0 \left(1 + 0,85 \cdot \frac{p}{100} \right)^n$$

I_0 - počáteční vklad, I_n - stav po n - obdobích, n - počet úrokovacích období, p - procenta, daň z úroků je 15%

Př. Podnikatel si uložil 800 000 Kč do banky na termínovaný vklad na 3 roky s ročním úrokem 1,4%. Úrokovací období je čtvrt roku, daň je 15% Jakou částku bude mít v bance, nebude-li vybírat ani vklady ani úroky.

Úrokovací období jsou 3 roky tj. 3krát 4

$$I_{12} = I_0 \left(1 + 0,85 \cdot 0,0035 \right)^{12} \text{ za } I_0 = 800\,000$$

$$\underline{I_{12} = 829\,032\text{Kč}}$$

PŘÍKLADY NA PROCVIČENÍ:

Př. Vkladatel si uložil částku 200 000Kč na termínovaný vklad na 18 měsíců. Vypočtete, jakou částku bude mít v peněžním ústavu, jestliže nebude vybírat úroky ani měnit vklad. Roční úrok je 1,2%, daň z úroku je 15%. Úrokovací období je pololetí.