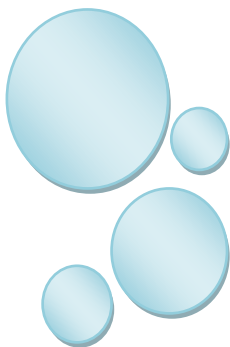


Funkce



Mgr. Jaroslava Vrbková

Gymnázium, SOŠ a VOŠ
Ledeč nad Sázavou



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



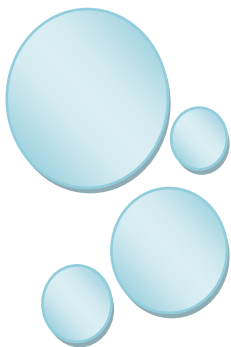
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Aritmetická posloupnost



VY_32_INOVACE_05_2_15_M2

Gymnázium, SOŠ a VOŠ
Ledeč nad Sázavou



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Aritmetická posloupnost

Aritmetická posloupnost je posloupnost čísel, ve které je mezi každým členem a jeho následovníkem nenulový konstantní rozdíl. Tento rozdíl značíme obvykle d a nazýváme ho difference.

Např. posloupnost čísel: 4, 8, 12, 16, 20.....

Tato posloupnost je aritmetická, protože rozdíl dvou sousedících členů je 4.

Diference je tedy $d = 4$.

Předpis pro aritmetickou posloupnost by tedy mohl vypadat takto:

$$a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, a_1 + 3d, a_1 + 4d, \dots, a_1 + n \cdot d$$

Vztah pro $(n+1)$ -ní člen: $a_{n+1} = a_n + d$

Výpočet difference pomocí dvou členů za sebou: $d = a_{n+1} - a_n$

Vztah pro n -tý člen: $a_n = a_1 + (n - 1)d$

Vztah pro dva libovolné členy, kde $r, s \in \mathbb{N}$: $a_r = a_s + (r - s)d$

Vztah pro součet prvních n členů: $s_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n)$

Pro $n > 1$ platí: $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$ (aritmetický průměr)

Grafem aritmetické posloupnosti je vždy množina izolovaných bodů, které leží na téže přímce.

Př.

V aritmetické posloupnosti je dáno: $a_1 = -4$, $d = 3$. Určete prvních pět členů, dále určete dvacátý člen.

- pro a_2 až a_5 použijeme vztah $a_{n+1} = a_n + d$

$$a_2 = a_1 + d \quad a_2 = -4 + 3 = \underline{-1}$$

$$a_3 = a_2 + d \quad a_3 = -1 + 3 = \underline{2}$$

$$a_4 = a_3 + d \quad a_4 = 2 + 3 = \underline{5}$$

$$a_5 = a_4 + d \quad a_5 = 5 + 3 = \underline{8} \quad a_{20} = a_1 + (n - 1)d \quad a_{20} = -4 + (20 - 1) 3 = \underline{53}$$

Př.

V aritmetické posloupnosti určete první člen a diferenci, je-li $a_{14} = 3$ $a_{23} = 21$.

Využijeme vztah: $a_{23} = a_{14} + 9d$ $a_{14} = a_1 + 13d$

$$21 = 3 + 9d \qquad 3 = a_1 + 26$$

$$d = 2 \qquad a_1 = -23$$

Př.

Určete pět prvních členů aritmetické posloupnosti, ve které platí

$$a_3 + a_{12} + 8 = 0$$

$$a_8 + a_1 - a_4 = 1$$

- všechny členy nahradíme pomocí a_1 a difference d

$$a_1 + 2d + a_1 + 11d + 8 = 0$$

$$a_1 + 7d + a_1 - (a_1 + 3d) = 1$$

- řešíme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých

$$2a_1 + 13d + 8 = 0$$

$$2a_1 - 26 + 8 = 0$$

$$a_1 + 4d - 1 = 0 \quad /(-2)$$

$$2a_1 = 18$$

$$5d + 10 = 0$$

$$a_1 = 9$$

$$d = -2$$

Prvních pět členů posloupnosti je: 9, 7, 5, 3, 1.

PŘÍKLADY NA PROCVIČENÍ:

1) V aritmetické posloupnosti určete první člen posloupnosti a diferenci, je-li:

a) $a_7 = 21$, $a_{13} = 15$

b) $a_9 = 6$, $a_{16} = -8$

c) $a_{11} = 9$, $a_{19} = 33$

2) V aritmetické posloupnosti je $a_1 = 20$, $d = 4$.

a) kolikátý člen je roven číslu 100?

b) kolikátý člen je roven číslu 150?

3) Určete první člen a diferenci posloupnosti, ve které platí:

a) $a_4 = 9$; $a_{10} = 21$

b) $a_1 + a_3 = 2$

$$a_2 + a_7 = -8$$

c) $2a_2 - a_3 = 20$

$$a_4 - 5a_1 = -95$$

d) $a_3 = 2a_4$

$$a_2 = -a_8$$

4) Mezi kořeny kvadratické rovnice $x^2 - 10x + 16 = 0$ vložte čtyři čísla tak, aby spolu s vypočtenými kořeny vzniklo šest následujících členů aritmetické posloupnosti.

Součet n- členů aritmetickém posloupnosti

Př.

V aritmetické posloupnosti je dáno: $a_6 = 9$, $a_{17} = 20$. Určete s_{200} .

$$s_{200} = \frac{200}{2}(a_1 + a_{200}), \text{ musíme určit } a_1, a_{200}$$

$$a_{17} = a_6 + 11d$$

$$20 = 9 + 11d$$

$$d = 1$$

$$a_6 = a_1 + 5d$$

$$9 = a_1 + 5$$

$$a_1 = 4$$

$$a_{200} = a_1 + 199d$$

$$a_{200} = 4 + 199$$

$$a_{200} = 203$$

$$s_{200} = \frac{200}{2}(4 + 203)$$

$$\underline{s_{200} = 20\,700}$$

Př.

Kolik prvních členů aritmetické posloupnosti dává součet 250, je-li $a_3 = 5$, $d = 1$.

$$s_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n) \quad s_n = 250, \text{ určíme } a_1, a_3 = a_1 + 2d, a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$5 = a_1 + 2 \quad \rightarrow \quad a_1 = 3$$

$$a_n = 3 + n - 1 \quad \rightarrow \quad a_n = 2 + n$$

$$250 = \frac{n}{2} (3 + 2 + n)$$

$$500 = 5n + n^2$$

$$n^2 + 5n - 500 = 0, n_1 = 20 \quad n_2 = -25 \quad n \in \mathbb{N}, \text{ proto vyhovuje pouze } n_1.$$

Součet 250 dává prvních dvacet členů aritmetické posloupnosti.

PŘÍKLADY NA PROCVIČENÍ:

- Př. Železné trubky jsou srovnané do osmi řad tak, že vrchní řada má 13 trubek a každý další o trubku víc. Kolik je všech trubek?
- Př. V trojúhelníku úhly tvoří aritmetickou posloupnost. Určíte ostatní úhly, pokud nejmenší úhel má velikost 20° .
- Př. Hrany kvádru tvoří tři po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti. Jaké jsou velké, pokud jejich součet je 24 cm a objem kvádru je 312 cm^3 ? Ukaž řešení / Ukaž všechna řešení.

Př. Strany pravoúhlého trojúhelníku tvoří aritmetickou posloupnost. Delší odvěsna má 24 cm. Vypočítejte obvod trojúhelníku.

Př. Zjistěte součet přirozených čísel $1+2+3+4+5+6+7+\dots+100$.

Př. V aritmetické posloupnosti určete první člen a diferenci, víte-li, že platí:

a) $a_6 = -\frac{1}{3} a_{16}$ $s_{26} = 104$

b) $s_5 = 60$ $s_{10} = 170$

c) $s_{10} = s_{11} = 165$