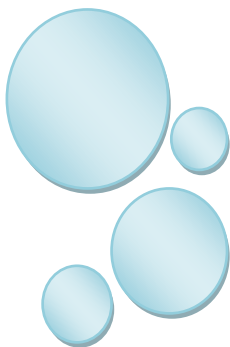


Funkce



Mgr. Jaroslava Vrbková

Gymnázium, SOŠ a VOŠ
Ledeč nad Sázavou



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



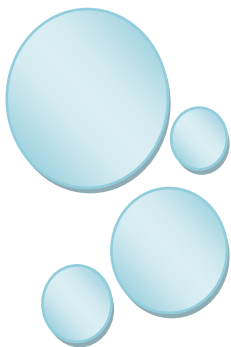
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Goniometrické rovnice



VY_32_INOVACE_05_2_13_M2

Gymnázium, SOŠ a VOŠ
Ledeč nad Sázavou



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Goniometrické rovnice

Základní goniometrické rovnice jsou ve tvaru $y = f(x)$, kde f je goniometrická funkce proměnné $x \in \mathbb{R}$.

Podle kvadrantu určíme **znaménko funkčních hodnot** goniometrické funkce.

	I. kvadrant	II. kvadrant	III. kvadrant	IV. kvadrant
$\sin x$	+	+	-	-
$\cos x$	+	-	-	+
$\operatorname{tg} x$	+	-	+	-
$\operatorname{cotg} x$	+	-	+	-

I. kvadr. je $(0; \frac{\pi}{2})$ II. kvadr. $(\frac{\pi}{2}; \pi)$ III. kvadr. $(\pi; \frac{3}{2}\pi)$ IV. kvadr. $(\frac{3}{2}\pi; 2\pi)$

Tabulka význačných hodnot goniometrických funkcí pro $x \in < 0 ; 2 \pi >$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\operatorname{tg} x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	Není def	0	Není def	0
$\operatorname{cotg} x$	Není def	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	Není def	0	Není def

Jednoduché goniometrické rovnice

Př. Řešte v $\mathbb{R}$:

$$\sin x = 1$$

$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \text{perioda fce } \sin x \text{ je } 360^\circ, \text{ nebo-li } 2k\pi \quad \underline{K = \left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}}$$

$$\cos x = -1$$

$$x = \pi + 2k\pi \quad \underline{K = \{ \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \}}$$

$$\sin x = 3$$

$\sin x$ je omezená funkce, nabývá hodnoty od -1 do +1. Nikdy se funkční hodnoty nerovnájí 3.

Proto $\underline{K} = \{\emptyset\}$

$$\cotg x = 0$$

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi = \frac{\pi}{2} (1 + 2k), \quad \underline{K} = \left\{ \frac{\pi}{2} (1 + 2k); k \in \mathbb{Z}, \right\}$$

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

kladná hodnota $\sin x$ je v 1. a 2. kvadrantu. Kořen rovnice bude mít dvě řešení

I. kvadr. $x = 30^0$, v míře obloukové tj. $\frac{30}{180} = \frac{\pi}{6}$

II. kvadr. $x = 180^0 - 30^0 = 150^0$, v míře obloukové tj. $\frac{150}{180} = \frac{50}{60} = \frac{5}{6}\pi$

$\sin x$ je periodická po 360^0 , nebo-li po $2k\pi$

$$\underline{K} = \cup \left\{ \frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{5}{6}\pi + 2k\pi \right\}, k \in \mathbb{Z}$$

PŘÍKLADY NA PROCVIČENÍ:

a) $\cos x = -5$

b) $\cotg x = 1$

c) $\cos x = -4$

d) $\tg x = 1$

e) $\cos x = -1$

f) $2\sin x - 1 = 1$

Goniometrické rovnice řešené substitucí

Pokud máme ve funkci nějaký složitější výraz, můžeme použít substituci, neboli nahrazení. Například chceme-li spočítat rovnici $\cos 2x = 1$, nahradíme si (provedeme substituci) za $2x$, tj. $z = 2x$ a dále již počítáme s rovnicí ve tvaru $\cos z = 1$. Substituce zjednoduší výraz, který právě počítáme. Nejprve vyřešíme novou rovnici $\cos z = 1$ a potom určíme x .

Nyní tak řešíme rovnici, $\cos z = 1$, přičemž z je neznámá. Hledáme tak, kdy je cosinus roven jedné. Vyjde nám, že $\cos z$ se rovná jedné při hodnotě 0^0 . Řešíme-li rovnici v $\mathbb{R}$, hledáme všechny možnosti, tj. musíme připočítat periodu. Kořeny rovnice $\cos z = 1$ jsou hodnoty $z = 0^0 + k\pi$.

Původní rovnice měla tvar $\cos 2x = 1$, musíme určit hodnotu x . $z = 2x$ a dosadíme. $0^0 + 2k\pi = 2x$, tj. $x = \frac{2k\pi}{2} = k\pi$, proto: $K = \{k\pi\}$

Př. $\cos 2x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ zavedeme substituci $2x = z$

$$\cos z = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos z^I = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad z^I = \frac{\pi}{4} \quad z \in \text{II. a III. kvadrantu};$$

($\cos z$ má zápornou funkční hodnotu)

$$\text{II. kvadrant...} \pi - z^I + 2k\pi = \pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi = \frac{3}{4}\pi + 2k\pi$$

$$\text{III. kvadrant...} \pi + z^I + 2k\pi = \pi + \frac{\pi}{4} + 2k\pi = \frac{5}{4}\pi + 2k\pi$$

Výsledek je sjednocení obou řešení $K = \cup \left\{ \frac{3}{4}\pi + 2k\pi; \frac{5}{4}\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$

Př. **$\operatorname{tg} 2x = \sqrt{3}$**

musíme určit podmínku pro $\operatorname{tg} 2x$, $2x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi$

Zavedeme substituci za $2x = z$

$$\operatorname{tg} z = \sqrt{3} \quad z \in I. \text{ kvadrantu} \quad z = \frac{\pi}{3} \quad \text{a perioda} \quad z = \frac{\pi}{3} + k\pi$$

$$2x = \frac{\pi}{3} + k\pi$$

$$x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}$$

řešení rovnice: $\underline{K} = \left\{ \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z} \right\}$

PŘÍKLADY NA PROCVIČENÍ:

1) $\cos 3x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

2) $\sin 2x = 0$

3) $\sin 3x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

4) $\sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{2}$

5) $\operatorname{tg} \left(x + \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Rovnice řešené pomocí vzorců

Vztahy mezi goniometrickými funkcemi se stejným argumentem.

1. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ pro každé x

2. $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$ definice
funkce
tangens

3. $\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$ $x \neq k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$

4. $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{cotg} x = 1$ $x \neq k \cdot \frac{\pi}{2}$ $k \in \mathbb{Z}$ definice
funkce
kotangens

Funkce s dvojnásobným argumentem.

1. $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$

2. $\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$

Hodnoty funkcí se záporným argumentem.

1. $\sin(-x) = -\sin x$

2. $\cos(-x) = \cos x$

sudá funkce

3. $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$

4. $\operatorname{cotg}(-x) = -\operatorname{cotg} x$

Funkce s polovičním argumentem.

$$1. \quad \left| \sin \frac{x}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$$

$$2. \quad \left| \cos \frac{x}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$$

$$3. \quad \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} \quad x \neq (2k + 1)\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

Funkce součtu argumentů .

1. $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$

2. $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$

3. $\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$

4. $\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$

5.. $\operatorname{tg}(x - y) = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$

Součet a rozdíl goniometrických funkcí.

1. $\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$ pro každé x a y
2. $\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$ pro každé x a y
3. $\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$ pro každé x a y
4. $\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$ pro každé x a y

Př.

$$2\sin^2x = 3\cos x$$

v rovnici jsou dvě různé gon. funkce. Nahradíme $\sin^2x$

$$2(1 - \cos^2x) = 3\cos x$$

$$2 - 2\cos^2x = 3\cos x$$

upravíme jako kvadratickou rovnici , potom zavedeme substituci za $\cos x$.

$$\cos x = a$$

$$-2\cos^2x - 3\cos x + 2 = 0 \quad / \cdot (-1)$$

$$2\cos^2x + 3\cos x - 2 = 0$$

$$2a^2 + 3a - 2 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac$$

$$D = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2) = 9 + 16 = 25$$

$$a_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{4} = \dots \quad a_1 = -2 \quad a_2 = \frac{1}{2}$$

$$\cos x = -2 \quad \cup \quad \cos x = \frac{1}{2}, \quad \cos x = -2 \text{ nenastane}$$

$$\text{řešíme pouze rovnici: } \cos x = \frac{1}{2}$$

$x \in \text{I. a II. kvadrantu}$

$$x \in \text{I. kvadrantu} \quad x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

$$x \in \text{IV. kvadrantu} \quad x = \frac{5}{3}\pi + 2k\pi$$

$$\mathbf{K} = \left\{ \frac{\pi}{3} + 2k\pi; \frac{5}{3}\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Př.

$$\sin x + \cos 2x = 1$$

nahradíme $\cos 2x$, $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$, potom nahradíme $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

$$\sin x + \cos^2 x - \sin^2 x = 1$$

řešíme jako kvadratickou rovnici

$$\sin x + 1 - \sin^2 x - \sin^2 x = 1$$

$$\sin x - 2\sin^2 x = 0$$

$\cdot (-1)$

$$2\sin^2 x - \sin x = 0$$

vytkneme $\sin x$

$$\sin x (2\sin x - 1) = 0$$

$$\sin x = 0 \quad \cup \quad 2\sin x - 1 = 0$$

$$x_1 = k\pi \qquad 2\sin x = 1$$

$$\sin x = \frac{1}{2}, x_2 \in I. kvadrantu \quad x_3 \in II. kvadrantu$$

$$x_2 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \qquad x_3 = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi$$

$$\underline{K} = \left\{ k\pi; \frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{5}{6}\pi + 2k\pi, k \in Z \right\}$$

PŘÍKLADY NA PROCVIČENÍ:

a) $\cos 2x = \sin x$

b) $2\cos^2 x = \sin x + 1$

c) $\sin^2 x + \cos x + 1 = 0$

d) $8\sin x + 5 = 2\cos 2x$

e) $4\sin^2 x - 4\cos x - 1 = 0$

Př.

$$\mathbf{tg\ x = 3cotgx}$$

určíme podmínku pro $tg\ x$ a $cotg\ x \neq k \frac{\pi}{2}$; nahradíme $cotg$ za $\frac{1}{tgx}$

$$tg\ x = 3 \frac{1}{tgx} \cdot tgx$$

$$tg^2x = 3$$

$$tg\ x = \pm\sqrt{3}$$