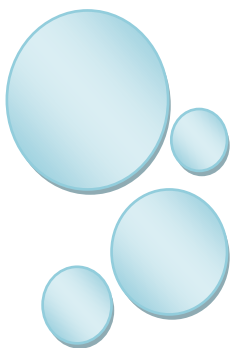


Funkce



Mgr. Jarmila Zelená

Gymnázium, SOŠ a VOŠ
Ledeč nad Sázavou



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



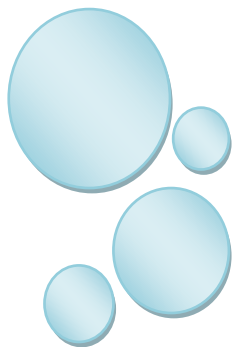
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Exponenciální rovnice



VY_32_INOVACE_05_2_11_M2

Gymnázium, SOŠ a VOŠ
Ledeč nad Sázavou



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Exponenciální rovnice

= rovnice, ve kterých se neznámá vyskytuje v exponentu mocniny

Řešíme je v závislosti na typu rovnice čtyřmi základními metodami.

1. **Převedení na stejný základ** – používá se v rovnicích, kde se levá i pravá strana rovnice dá upravit na mocninu se stejným základem. Pak lze využít věty: Platí-li $a^u = a^v \Rightarrow u = v$ (Rovnají-li se základy, rovnají se i exponenty.)

Při použití této metody využíváme **pravidla pro počítání s mocninami**.

$$a^0 = 1$$

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s}$$

$$\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$$

$$(a^r)^s = a^{r \cdot s}$$

$$\sqrt[r]{a^s} = a^{\frac{s}{r}}$$

$$a^{-r} = \frac{1}{a^r}$$

$$(a \cdot b)^r = a^r \cdot b^r$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^r = \left(\frac{b}{a}\right)^{-r}$$

Řešené příklady:

1. Řešte rovnici v R: $3^{x+1} = 27$

Obě strany rovnice lze vyjádřit mocninou o základu 3

$$3^{x+1} = 3^3$$

Protože se rovnají základy, použijeme větu a řešení získáme porovnáním exponentů

$$x + 1 = 3$$

$$x = 2$$

$$\underline{K = \{2\}}$$

2. Řešte rovnici v $\mathbb{R}$: $\left(\frac{4}{9}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^8$

Obě strany rovnice převedeme na společný základ za použití vět o mocninách

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-8}$$

$$2x = -8$$

$$x = -4$$

$$\underline{K = \{-4\}}$$

3. Řešte rovnici v R: $\left(\frac{4}{5}\right)^{2x+5} = 0,8$

Desetinné číslo vyjádříme zlomkem a zkrátíme.

$$\left(\frac{4}{5}\right)^{2x+5} = \frac{8}{10}$$

$$\left(\frac{4}{5}\right)^{2x+5} = \left(\frac{4}{5}\right)^1$$

$$2x+5=1$$

$$2x=-4$$

$$x=-2$$

$$\underline{K = \{-2\}}$$

4. Řešte rovnici v $\mathbb{R}$: $2^{2x+2} = \sqrt[5]{4096}$

Určíme $D_f : x \in \mathbb{Z}^+$

Číslo 4096 převedeme na mocninu o základu 2

$$2^{2x+2} = \sqrt[5]{2^{12}}$$

Odmocninu převedeme na mocninu

$$2^{2x+2} = 2^{\frac{12}{x}}$$

$$2x+2 = \frac{12}{x} / \cdot x$$

$$2x^2 + 2x = 12 / :2$$

$$x^2 + x - 6 = 0$$

$$x_1 \cdot x_2 = -6 \wedge x_1 + x_2 = -1 \Rightarrow$$

$$x_1 = -3 \notin D_f$$

$$x_2 = 2 \in D_f$$

$$\underline{K = \{2\}}$$

5. Řešte rovnici v $\mathbb{R}$: $3^{x^2-x-42} = 1$

Číslo 1 převedeme na mocninu čísla 3

$$3^{x^2-x-42} = 3^0$$

$$x^2 - x - 42 = 0$$

$$x_1 \cdot x_2 = -42 \wedge x_1 + x_2 = 1 \Rightarrow$$

$$x_1 = -6$$

$$x_2 = 7$$

$$\underline{K = \{-6; 7\}}$$

6. Řešte rovnici v R: $2^{3x} \cdot 4^{3x-3} = 8^{2x+1}$

Obě strany rovnice převedeme na společný základ čísla 2 za použití vět o mocninách

$$2^{3x} \cdot (2^2)^{3x-3} = (2^3)^{2x+1}$$

$$2^{3x} \cdot 2^{6x-6} = 2^{6x+3}$$

$$2^{3x+6x-6} = 2^{6x+3}$$

$$9x - 6 = 6x + 3$$

$$x = 3$$

$$\underline{K = \{3\}}$$

Příklady k procvičení:

Řešte rovnice v R:

1. $3^3 \cdot 27^{2x-3} = 81^{3x-5}$

$$\underline{K = \left\{ \frac{7}{3} \right\}}$$

2. $7^{x^2-5x+6} = 1$

$$\underline{K = \{2; 3\}}$$

3. $3^{1-x} = \sqrt[3]{27^x}$

$$\underline{K = \left\{ \frac{1}{2} \right\}}$$

4. $\frac{3^x}{5^x} = \frac{25}{9}$

$$\underline{K = \{-2\}}$$

5. $2^{x+7} \sqrt[4]{4^{13-x}} = 1024$

$$\underline{K = \{-2\}}$$

6. $\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{x}{3}} = \sqrt[3]{\left(\frac{4}{3}\right)^x}$

$$\underline{K = \{0\}}$$

$$7. \quad 0,2^{x+1} = 25$$

$$8. \quad \left(1 - \frac{5}{9}\right)^{\frac{2}{3-2x}} = \left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{3}{x-5}}$$

$$9. \quad \frac{1}{3} \cdot 12^x = 27 \cdot 4^x$$

$$10. \quad 2^{x^2-6x+7} = 4^{2x-1}$$

$$\underline{K = \{-3\}}$$

$$\underline{K = \left\{\frac{-1}{4}\right\}}$$

$$\underline{K = \{4\}}$$

$$\underline{K = \{1;9\}}$$

2. **Metoda vytýkáním**- používáme v rovnicích, kde se objevují součty nebo rozdíly mocnin se stejnými základy.

Při řešení užíváme věty $a^{r+s} = a^r \cdot a^s$; $a^{r-s} = \frac{a^r}{a^s}$

Řešené příklady:

1. Řešte rovnici v R: $3^{2x-1} + 3^{2x-2} - 3^{2x-4} = 315$

$$\frac{3^{2x}}{3} + \frac{3^{2x}}{3^2} - \frac{3^{2x}}{3^4} = 315$$

Vytkneme společnou mocninu 3^{2x}

$$3^{2x} \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{81} \right) = 315$$

$$3^{2x} \cdot \frac{27+9-1}{81} = 315$$

$$3^{2x} \cdot \frac{35}{81} = 315 : 81$$

$$3^{2x} \cdot 35 = 25515 / : 35$$

$$3^{2x} = 729$$

$$3^{2x} = 3^6$$

$$2x = 6$$

$$x = 3$$

$$\underline{K = \{3\}}$$

2. Řešte rovnici v R: $7^{x+2} + 2 \cdot 7^{x-1} = 345$

$$7^2 \cdot 7^x + 2 \cdot \frac{7^x}{7} = 345 / \cdot 7$$

$$343 \cdot 7^x + 2 \cdot 7^x = 2415$$

$$7^x \cdot (343 + 2) = 2415$$

$$345 \cdot 7^x = 2415$$

$$7^x = 7^1$$

$$x = 1$$

$$\underline{K = \{1\}}$$

Příklady k procvičení:

Řešte rovnice v R:

1. $3^{x+2} + 3^{x-1} = 28$

2. $2^{x-1} + 2^{x-2} + 2^{x-3} = 448$

3. $3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} = \frac{40}{3}$

4. $5 \cdot 4^{x+1} - 4^{x+2} = 4^{x-1} + 240$

5. $9^{x+2} + 5 \cdot 9^{x+1} = 14$

$K = \{1\}$

$K = \{9\}$

$K = \{-1\}$

$K = \{3\}$

$K = \{-1\}$

3. **Metoda substituční** - používáme v rovnicích, kde se objevují mocniny se stejným základem, ale jsou typu $2k, k$, tedy jeden je dvojnásobkem druhého (např. $3^{2x}; 3^x$). Použijeme větu $a^{r \cdot s} = (a^r)^s$. Po substituci obvykle vede na kvadratickou rovnici.

Řešené příklady:

1. Řešte rovnici v R: $25^{2x} - 3 \cdot 25^x = 10$

Exponent začíná různým koeficientem u **x**. Použijeme substituci za 25^x .

Volíme novou proměnnou. Tedy $25^x = a$.

Rovnici lze zapsat ve tvaru $(25^x)^2 - 3 \cdot 25^x = 10$

Po substituci $a^2 - 3a - 10 = 0$ jsme získali kvadratickou rovnici. Určíme její kořeny a nezapomeneme se vrátit k substituci. (Pozor na formální správnost při označení počítaných kořenů.)

$$a_1 \cdot a_2 = -10 \wedge a_1 + a_2 = 3 \Rightarrow$$

$$a_1 = 5$$

$$a_2 = -2$$

Po návratu k substituci

a)

$$25^x = a$$

$$25^x = 5$$

$$5^{2x} = 5^1$$

$$2x = 1$$

$$x = \frac{1}{2}$$

$$\underline{K = \left\{ \frac{1}{2} \right\}}$$

b) $25^x = -2$ tato rovnice nemá řešení

2. Řešte rovnici v R: $4^x + 2^x - 6 = 0$

Rovnici převedeme na společný základ čísla 2 za použití vět o mocninách a zavedeme substituci $y = 2^x$

$$(2^2)^x + 2^x - 6 = 0$$

$$(2^x)^2 + 2^x - 6 = 0$$

$$y^2 + y - 6 = 0$$

$$y_1 \cdot y_2 = -6 \wedge y_1 + y_2 = -1 \Rightarrow$$

$$y_1 = -3$$

$$y_2 = 2$$

Vrátíme se zpět do substituce $y = 2^x$

a) $2^x = -3$ tato rovnice nemá řešení

$$\text{b) } 2^x = 2^1$$

$$x = 1$$

$$\underline{K = \{1\}}$$

3. Řešte rovnici v R: $4^{2x+1} = 65 \cdot 4^{x-1} - 1$

Zavedeme substituci $u = 4^x$

$$4 \cdot (4^{2x}) = 65 \cdot \frac{4^x}{4} - 1 \cdot 4$$

$$16 \cdot (4^x)^2 = 65 \cdot 4^x - 4$$

$$16u^2 - 65u + 4 = 0$$

$$D = 4225 - 256 = 3969$$

$$\sqrt{D} = 63$$

$$u_{1,2} = \frac{65 \pm 63}{32} \Rightarrow$$

$$u_1 = 4 \wedge u_2 = \frac{1}{16}$$

Vrátíme se zpět do substituce $u = 4^x$

$$\text{a) } 4^x = 4$$

$$x_1 = 1$$

$$\text{b) } 4^x = \frac{1}{16}$$

$$4^x = 16^{-1}$$

$$4^x = (4^2)^{-1}$$

$$4^x = 4^{-2}$$

$$x_2 = -2$$

$$\underline{K = \{-2; 1\}}$$

Příklady k procvičení:

Řešte rovnice v R:

1. $4^x - 9 \cdot 2^x + 8 = 0$

$K = \{0; 3\}$

2. $3^{x+1} + 9^x - 108 = 0$

$K = \{2\}$

3. $3^{2x-1} + 3 \cdot 3^x - 12 = 0$

$K = \{1\}$

4. $9^x + 2 \cdot 3^x - 3 = 0$

$K = \{0\}$

5. $7^{2x} + 7^x - 686 = 36 \cdot 7^x$

$K = \{2\}$

6. $3^{2x} - 3^x = 702$

$K = \{3\}$

7. $25^x - 4 \cdot 5^x - 5 = 0$

$K = \{1\}$

8. $\frac{1}{5^x} + 5^x = \frac{26}{5}$

$K = \{\pm 1\}$

$$9. \quad 9^x - 25 \cdot 3^x - 54 = 0$$

$$\underline{K = \{3\}}$$

$$10. \quad 2^{2x} - 12 \cdot 2^x + 32 = 0$$

$$\underline{K = \{2; 3\}}$$

4. **Metoda logaritmická** - používáme v rovnicích typu $a^x = b$, tedy pokud nelze mocniny převést na společný základ. Použijeme větu $\log_a x^r = r \cdot \log_a x$.

Počítání s logaritmy se řídí následujícími pravidly:

1. logaritmus součinu: $\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$

2. logaritmus podílu: $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$

Řešené příklady:

1. Řešte rovnici v R: $2^{x+1} = 3$

Exponenciální rovnici nelze převést na mocniny o stejném základu, proto rovnici zlogaritmujeme.

$$\log 2^{x+1} = \log 3$$

$$(x+1)\log 2 = \log 3$$

$$x+1 = \frac{\log 3}{\log 2}$$

$$x = \frac{\log 3}{\log 2} - 1$$

$$x = 0,5849625007$$

$$\underline{K = \{0,5849625007\}}$$

2. Řešte rovnici v R: $2^{x+4} = 3^{2x-1}$ rovnici zlogaritmujeme

$$\log 2^{x+4} = \log 3^{2x-1}$$

$$(x+4) \cdot \log 2 = (2x-1) \cdot \log 3$$

$$x \cdot \log 2 + 4 \cdot \log 2 = 2x \cdot \log 3 - \log 3$$

Výrazy s neznámou převedeme na jednu stranu, čísla na druhou

$$x \cdot \log 2 - 2x \cdot \log 3 = -\log 3 - 4 \cdot \log 2$$

Vytkneme neznámou na levé straně rovnice

$$x \cdot (\log 2 - 2 \cdot \log 3) = -\log 3 - \log 2^4$$

$$x \cdot (\log 2 - \log 3^2) = -(\log 3 + \log 16)$$

$$x \cdot \log \frac{2}{9} = -1 \cdot (\log 3 \cdot 16)$$

$$x \cdot \log \frac{2}{9} = \log 48^{-1}$$

$$x = \frac{\log \frac{1}{48}}{\log \frac{2}{9}}$$

$$x = 2,573804393$$

$$\underline{K = \{2,573804393\}}$$

3. Řešte rovnici v R: $2^x + 2 \cdot 2^x + 4 \cdot 2^x + 8 \cdot 2^x = 3^x + 3 \cdot 3^x + 9 \cdot 3^x + 27 \cdot 3^x$

Z obou stran rovnice vytkneme mocniny

$$2^x \cdot (1 + 2 + 4 + 8) = 3^x \cdot (1 + 3 + 9 + 27)$$

$$15 \cdot 2^x = 40 \cdot 3^x$$

$$\frac{2^x}{3^x} = \frac{40}{15}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{8}{3}$$

$$\log\left(\frac{2}{3}\right)^x = \log \frac{8}{3}$$

$$x \cdot \log \frac{2}{3} = \log \frac{8}{3}$$

$$x = \frac{\log \frac{8}{3}}{\log \frac{2}{3}}$$

$$x = -2,419022583$$

$$\underline{K = \{2,573804393\}}$$

Příklady k procvičení:

Řešte rovnice v R:

1. $4^{x-2} = 5 \cdot 3^{x-2}$

$K = \{7,59450194\}$

2. $3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} = 5^x + 5^{x+1} + 5^{x+2}$

$K = \{-1,701241689\}$

3. $\frac{5^x}{7} = 3^x$

$K = \{3,809343264\}$

4. $3^{x+1} = 7^x$

$K = \{1,296606943\}$