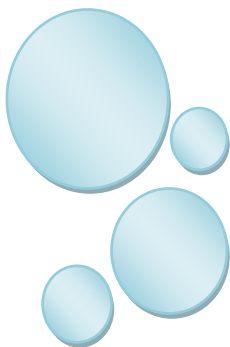


Rovnice



RNDr. Yvetta Bartáková

Gymnázium, SOŠ a VOŠ
Ledeč nad Sázavou



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



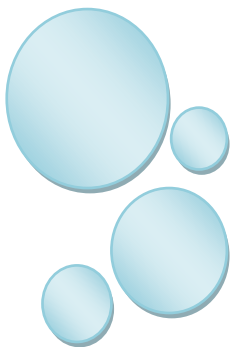
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Binomické rovnice



VY_32_INOVACE_05_1_18_M2

Gymnázium, SOŠ a VOŠ
Ledeč nad Sázavou



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Binomické rovnice

Binomickou rovnicí se nazývá rovnice tvaru $x^n - a = 0$, kde a je komplexní číslo, x je neznámá z oboru $\mathbb{C}$ a n je přirozený exponent. Je-li $a = 0$, pak má rovnice jediný kořen $x = 0$.

Kořeny rovnice získáme jako n -té odmocniny komplexního čísla $a = |a| \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi)$.

Binomická rovnice $x^n - |a| \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi) = 0$ má v oboru komplexních čísel právě n

různých kořenů: $x_k = \sqrt[n]{|a|} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right)$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, které leží pro $n \geq 2$ v Gaussově rovině ve vrcholech pravidelného n -úhelníku vepsaného do kružnice se středem v počátku soustavy souřadnic a s poloměrem $\sqrt[n]{|a|}$.

Př. 1. Řešte v $\mathbb{C}$, výsledek запиšte v goniometrickém tvaru, pak v algebraickém tvaru a kořeny znázorněte v Gaussově rovině: $x^4 + 16 = 0$

$$x^4 = -16 \quad \text{/osamostatníme neznámou } x \text{ na levé straně rovnice}$$

$x^4 = 16(\cos \pi + i \sin \pi)$ /převédeme komplexní číslo na pravé straně rovnice do goniometrického tvaru

$$x_k = \sqrt[4]{16} \left(\cos \frac{\pi + 2k\pi}{4} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{4} \right), k = 0, 1, 2, 3$$

/zapišeme všechny kořeny

Vypíšeme jednotlivé kořeny a převedeme je z goniometrického tvaru do algebraického tvaru:

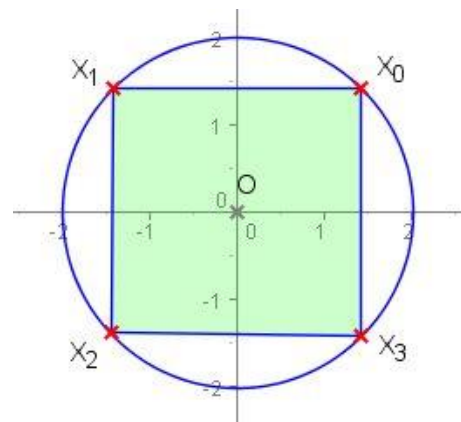
$$x_0 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$$

$$x_1 = 2 \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) = 2 \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$$

$$x_2 = 2 \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right) = 2 \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$$

$$x_3 = 2 \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right) = 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$$

$$K = \{\sqrt{2} \pm i\sqrt{2}; -\sqrt{2} \pm i\sqrt{2}\}$$



Př. 2. Řešte v C: $x^3 - 1 - i = 0$

$x^3 = 1 + i$ /osamostatníme neznámou x na levé straně rovnice

$x^3 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$ /převédeme komplexní číslo na pravé straně rovnice do goniometrického tvaru

$$x_k = \sqrt[3]{\sqrt{2}} \left(\cos \frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{3} \right), k = 0, 1, 2$$

/zapíšeme všechny kořeny

$$x_k = \sqrt[6]{2} \left(\cos \left(\frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}k\pi \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}k\pi \right) \right), k = 0, 1, 2$$

/ výsledek upravíme

$$K = \left\{ \sqrt[6]{2} \left(\cos \left(\frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}k\pi \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}k\pi \right) \right) \right\}, k = 0, 1, 2$$

Př. 3. Řešte v $\mathbb{C}$: $x^6 - 7x^3 - 8 = 0$

$(x^3 - 8)(x^3 + 1) = 0$ / upravíme na součin závorek nebo použijeme

substituci $x^3 = y$ a vyřešíme kvadratickou rovnici

$x^3 = 8 \vee x^3 = -1$ / každou závorku položíme rovnu 0

$x^3 = 8(\cos 0 + i \sin 0) \vee x^3 = \cos \pi + i \sin \pi$ / řešíme dvě binomické rovnice

$$x_k = \sqrt[3]{8} \left(\cos \frac{2k\pi}{3} + i \sin \frac{2k\pi}{3} \right), k = 0, 1, 2 \vee x_l = \cos \frac{\pi + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{3}, l = 0, 1, 2$$

Kořeny vyjádříme v goniometrickém a algebraickém tvaru:

$$x_0 = 2(\cos 0 + i \sin 0) = 2$$

$$x_1 = 2\left(\cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi\right) = 2\left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 + i\sqrt{3}$$

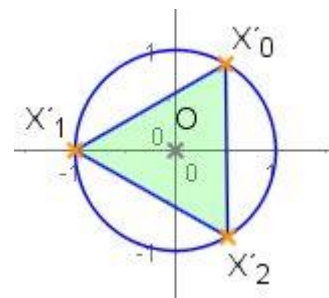
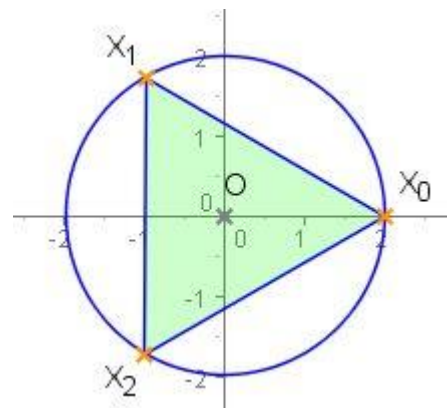
$$x_2 = 2\left(\cos \frac{4}{3}\pi + i \sin \frac{4}{3}\pi\right) = 2\left(-\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 - i\sqrt{3}$$

$$x'_0 = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x'_1 = \cos \pi + i \sin \pi = -1$$

$$x'_2 = \cos \frac{5}{3}\pi + i \sin \frac{5}{3}\pi = \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$K = \left\{-1; 2; -1 \pm i\sqrt{3}; \frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$$



Př. 4. Řešte v $\mathbb{C}$, výsledek úloh a), b), c) запиште в алгебраическом tvaru a kořeny zakreslete do Gaussovy roviny:

a) $x^3 - 27 = 0$

b) $x^6 - 1 = 0$

c) $x^3 - 64i = 0$

d) $x^6 - 1 + i\sqrt{3} = 0$

Př. 5. Řešte v C:

a) $(ix)^4 + \sqrt{3} - i = 0$

b) $x^5 + 1 = \sqrt{3} i$

c) $x^4 + 6x^2 - 27 = 0$

d) $x^6 - 19x^3 - 216 = 0$

Procvičování:

1. Maturitní minimum – sbírka úloh pro SŠ, Prometheus, str. 142, př. 5.1, 5.2, 5.4
2. Sbírká úloh z M pro SOŠ, SOU a nástavbové studium, Hudcová – Kubíčková, Prométheus, str. 193, př. 30