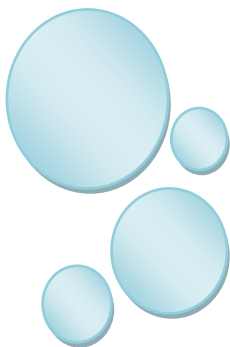


# Rovnice



RNDr. Yvetta Bartáková

Gymnázium, SOŠ a VOŠ  
Ledeč nad Sázavou



evropský  
sociální  
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



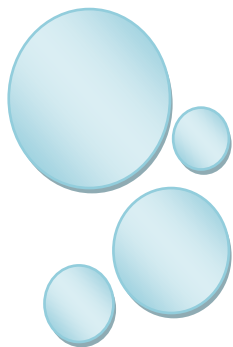
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,  
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání  
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

# Řešení rovnic s komplexními čísly



VY\_32\_INOVACE\_05\_1\_16\_M2

Gymnázium, SOŠ a VOŠ  
Ledeč nad Sázavou



evropský  
sociální  
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,  
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání  
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

# Rovnice se dvěma neznámými řešené pomocí rovnosti komplexních čísel

---

Komplexní čísla se rovnají, právě když se rovnají jejich části reálné i jejich části imaginární:

$$a + bi = c + di \Leftrightarrow (a = c \wedge b = d)$$

Př. 1. Řešte v  $\mathbb{C}$ :  $2x + iy = 4 - 3i$

$2x = 4 \wedge y = -3$  /porovnáme reálné a imaginární části levé a pravé strany rovnice

$$x = 2 \wedge y = -3 \quad \text{/dopočteme } x$$

$$K = \{[2; -3]\}$$

Př. 2. Řešte v  $\mathbb{C}$ :  $x(1+i) + y(1-i) = 4 + 2i$

$$x + xi + y - yi = 4 + 2i$$

/závorky roznásobíme

$$x + y + (x - y)i = 4 + 2i$$

/upravíme do tvaru komplexního čísla

$$x + y = 4 \wedge x - y = 2$$

/porovnáme reálné a imaginární části obou stran

rovnice

$$x + y = 4$$

Řešíme soustavu rovnic :

$$x - y = 2$$

$$2x = 6 \rightarrow x = 3$$

Dosadíme např. do 1. rovnice a dopočteme  $y = 1$ .

$$K = \{[3; 1]\}$$

Př. 3. Řešte v C:

a)  $\frac{2}{3}x + \frac{1}{2}yi = 4 - 5i$

b)  $x(y+i) + y(x-i) = 2x + 2yi$

c)  $\frac{2+3i^{25}}{1-2i^{63}} = \frac{3}{5}x + \frac{2}{5}yi$

d)  $(2+i)^3 - \frac{1-i}{i} = x - 4yi - y$

e)  $(3-2i) \cdot (i-x) = 2y - i$

f)  $\frac{3-2i}{1+i} = 2x + yi$

Procvičování:

1. Maturitní minimum – sbírka úloh pro SŠ, Prometheus, str.142, př.4.1
2. Sbírká úloh z M pro SOŠ, SOU a nástavbové studium, Hudcová – Kubíčková, Prométheus, str. 185, př.19, 20

# Lineární rovnice s komplexními koeficienty

---

Využíváme ekvivalentní úpravy rovnice:

1. záměna stran rovnice
2. přičtení čísla nebo výrazu, který je definován v celém oboru řešení rovnice, k oběma stranám rovnice
3. vynásobení obou stran rovnice stejným číslem různým od nuly nebo výrazem, který je definován v celém oboru řešení rovnice a je různý od nuly

Př. 1. Řešte v  $\mathbb{C}$ :  $(1-i)z = i(z+1)$

$$z - iz = iz + i$$

/závorky odstraníme

$$z - 2iz = i$$

/ neznámou  $z$  převedeme na levou stranu rovnice

$$z \cdot (1 - 2i) = i$$

/ vytkneme neznámou

$$z = \frac{i}{1 - 2i}$$

/ rovnici vydělíme výrazem  $(1 - 2i)$

$$z = \frac{i \cdot (1 + 2i)}{(1 - 2i) \cdot (1 + 2i)}$$

/ vydělíme komplexní čísla na pravé straně rovnice

( tzn. rozšíříme komplexně sdruženým číslem k číslu ve jmenovateli )

$$z = \frac{i - 2}{1 + 4} \rightarrow z = -\frac{2}{5} + \frac{1}{5}i$$

$$K = \left\{ -\frac{2}{5} + \frac{1}{5}i \right\}$$

Př. 2. Řešte v  $\mathbb{C}$ :

a)  $(z-i)4 = (2-i)^2$

b)  $z = 3i(z-i) - 5z$

c)  $(z+i)(z-3i) = z(z-i)$

d)  $\frac{z}{1-i} + \frac{z+2}{i} = \frac{5}{2i-1}$

e)  $i - \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2 = 1 - \frac{1}{z}$

f)  $\frac{1+i}{i}z = (1-i)(z-1)$

Procvičování:

Maturitní minimum – sbírka úloh pro SŠ, Prometheus, str.142, př.4.2 a,b,c



# Rovnice s komplexními a komplexně sdruženými čísly

---

Komplexní čísla  $z$  a  $\bar{z}$  nahradíme jejich algebraickým tvarem:

$$z = x + yi, \bar{z} = x - yi$$

Př. 1. Řešte v C:  $z^2 = z + \bar{z}$

$$(x + yi)^2 = x + yi + x - yi$$

/  $z$  a  $\bar{z}$  nahradíme  $z = x + yi$ ,  $\bar{z} = x - yi$

$$x^2 + 2xyi - y^2 = 2x$$

/ závorku umocníme a na pravé straně rovnice výrazy sečteme

$$x^2 - y^2 = 2x \wedge 2xy = 0$$

/ porovnáme reálné a imaginární části levé a pravé strany rovnice

a) je-li  $x = 0$ , pak  $y = 0$   
případech:  $x = 0$  nebo

/ ve druhé rovnici nastane rovnost ve dvou

$y = 0$ , dosadíme do první rovnice a dopočteme z ní  $y$  nebo  $x$

$$z = 0 + 0i \rightarrow z = 0$$

b) je-li  $y = 0$ , pak  $x^2 = 2x$

$$x^2 - 2x = 0$$

$$x(x-2) = 0$$

$$x_1 = 0 \vee x_2 = 2$$

$$z_1 = 0 + 0i \rightarrow z_1 = 0$$

$$z_2 = 2 + 0i \rightarrow z_2 = 2 \quad K = \{0; 2\}$$

Př. 2. Řešte v  $\mathbb{C}$ :

a)  $z \cdot \bar{z} = 3z$

b)  $(1 - 2i)z = 2\bar{z} - i(2 + i)$

c)  $2z + 3\bar{z} = 5 + i$

d)  $\left(2 - \frac{1}{i}\right)\bar{z} - 13 = 13i - 2z$

e)  $z \cdot \bar{z} - z = \overline{6 - 2i}$

f)  $z\left(\bar{z} - 4\right) - 1 = 8i$

Procvičování:

Maturitní minimum – sbírka úloh pro SŠ, Prometheus, str.142, př.4.2 d,e,f

# Rovnice s absolutními hodnotami

---

Pro absolutní hodnotu komplexního čísla  $z$  platí:  $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$ .

Je-li  $z = 0$ , pak  $|z| = 0$ . Pro  $z = a + bi$  je  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ .

Př. 1. Řešte v  $\mathbb{C}$ :  $|z| - z = 1 + 2i$

$$\sqrt{a^2 + b^2} - (a + bi) = 1 + 2i$$

/  $|z|$  a  $z$  nahradíme:  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ ,  $z = a + bi$

$$\sqrt{a^2 + b^2} - a - bi = 1 + 2i$$

/ odstraníme závorku

$$\sqrt{a^2 + b^2} - a = 1 \wedge -b = 2$$

/ porovnáme reálné a imaginární části levé a pravé strany rovnice

$$b = -2$$

$$\sqrt{a^2 + 4} - a = 1$$

/ dosadíme  $b$  do první rovnice a dopočteme  $a$

$$\sqrt{a^2 + 4} = a + 1$$

$$a^2 + 4 = a^2 + 2a + 1$$

$$3 = 2a$$

$$a = \frac{3}{2}$$

$$z = \frac{3}{2} - 2i$$

Použili jsme neekvivalentní úpravu - umocnění, musí následovat zkouška:

$$L = \sqrt{\frac{9}{4} + 4} - \left(\frac{3}{2} - 2i\right) = \sqrt{\frac{25}{4}} - \frac{3}{2} + 2i = \frac{5}{2} - \frac{3}{2} + 2i = 1 + 2i$$

$$P = 1 + 2i$$

$$L = P \qquad K = \left\{\frac{3}{2} - 2i\right\}$$

Př. 2. Řešte v  $\mathbb{C}$ :

a)  $|z+1| - 4i = z + 3$

b)  $|z+i| = 2z+i$

c)  $|z+2-i| = 5(z+3i)$

d)  $|z-1| = |z+i| = |z|$