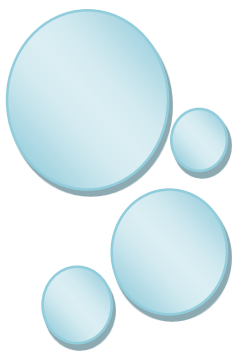


Rovnice



Mgr. Petra Drápelová

Gymnázium, SOŠ a VOŠ
Ledeč nad Sázavou



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



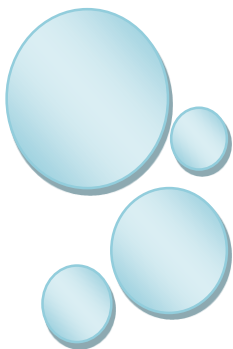
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Lineární rovnice s absolutní hodnotou



VY_32_INOVACE_05_1_09_M2

Gymnázium, SOŠ a VOŠ
Ledeč nad Sázavou



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Funkce s absolutní hodnotou obsahují neznámou v absolutní hodnotě.

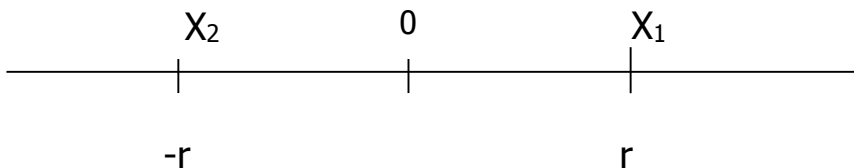
Absolutní hodnota výrazu $V(x)$ s neznámou $x \in \mathbb{R}$ je definována:

$$a) V(x) \geq 0 \Rightarrow |V(x)| = V(x)$$

$$b) V(x) < 0 \Rightarrow |V(x)| = -V(x)$$

Geometrický význam absolutní hodnoty.

Absolutní hodnota reálného čísla X udává vzdálenost jeho obrazu X od počátku na číselné ose $|x| = |X - 0| = r$.



- $|x - s| = r$

Vzdálenost reálného čísla x od pevného bodu s (středu) na číselné ose je rovna nezápornému číslu r . $|x - s| = r \Rightarrow x_1 = s - r \wedge x_2 = s + r$

Způsoby řešení.

- **Řešení pomocí geometrického významu absolutní hodnoty**
- **Metodou nulových bodů** (lze řešit všechny typy)

Řešení pomocí geometrického významu absolutní hodnoty

Tímto způsobem lze řešit pouze rovnice, které obsahují pouze jednu absolutní hodnotu a neznámá je obsažena pouze v absolutní hodnotě.

Př: Řešte v $\mathbb{R}$:

$$|3x| = -2$$

$$K = \{ \}$$

absolutní hodnota je vzdálenost; vzdálenost je vždy kladné číslo, proto rovnice nemá řešení

Př: Řešte v R:

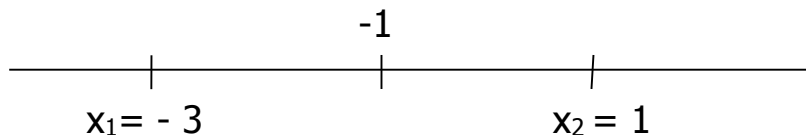
$$|x + 1| = 2$$

Čteme: **vzdálenost bodu x od -1 je 2**

-1 je nulový bod z absolutní hodnoty, který získáme tak, že vnitřek absolutní hodnoty položíme roven nule a vyřešíme rovnici

-1 je pevný bod s (střed) na číselné ose

Řešení $|x + 1| = 2 \Rightarrow x_1 = -1 - 2 = -3 \wedge x_2 = -1 + 2 = 1$



$$K = \{-3; 1\}$$

Příklady k procvičení:

1. $|x - 1| = 3$

$$K = \{-2; 4\}$$

2. $|2x - 5| = 3$

$$K = \{1; 4\}$$

3. $|3 - 2x| = 1$

$$K = \{1; 2\}$$

4. $\frac{3}{|x - 1|} = 1$

$$K = \{-2; 4\}$$

5. $|3x| = -1$

$$K = \{ \}$$

Řešení metodou nulových bodů.

Touto metodou lze vyřešit všechny typy rovnic s absolutní hodnotou.

Rovnice, které obsahují více absolutních hodnot nebo neznámou i mimo absolutní hodnotu nelze řešit pomocí geometrického významu. Musíme řešit metodou nulových bodů.

Postup:

1. Určíme nulové body z absolutních hodnot.
2. Nulové body znázorníme na číselnou osu.
3. Nulové body rozdělí číselnou osu na intervaly.

4. Sestavíme tabulku a zjistíme, jakou hodnotu (+; -) má vnitřek absolutních hodnot v intervalech. Nahradíme absolutní hodnoty lineární rovnicí. Pokud je vnitřek absolutní hodnoty záporný, změníme znaménko před absolutní hodnotou a z absolutní hodnoty uděláme závorku. Pokud je vnitřek absolutní hodnoty kladný, uděláme pouze z absolutní hodnoty závorku. Využíváme znalosti:

$$a) V(x) \geq 0 \Rightarrow |V(x)| = V(x)$$

$$b) V(x) < 0 \Rightarrow |V(x)| = -V(x)$$

5. Vyřešíme rovnice, zkontrolujeme, zda čísla patří do intervalů a výsledek získáme jako sjednocení výsledků řešení v intervalech.

Př.: Řešte v R:

$$|x| = x + 3$$

1) Nulové body (NB) z absolutní hodnoty $x = 0$

2) Intervaly: $I_1: (-\infty; 0); \quad I_2: <0; \infty)$

3) Tabulka:

	$(-\infty; 0)$	$<0; \infty)$
x	-	+

Jak získat znaménko v tabulce: z daného intervalu vybereme libovolné číslo a dosadíme za x (např. z intervalu $(-\infty; 0)$ vybereme třeba -5 a dosadíme za x; vyšlo záporné číslo, do tabulky zapíšeme -

4) Řešení v intervalech:

a) **v $I_1: (-\infty; 0)$** , protože v tomto intervalu je vnitřek absolutní hodnoty záporný, využijeme vlastnosti

$$V(x) < 0 \Rightarrow |V(x)| = -V(x)$$

$$-x = x + 3$$

$$-2x = 3$$

$$x = -\frac{3}{2}; \frac{-3}{2} \in (-\infty; 0) \Rightarrow K_1 = \left\{ \frac{-3}{2} \right\}$$

b) v $I_2: <0; \infty)$, protože je vnitřek absolutní hodnoty v tomto intervalu kladný,

využijeme vlastnosti $V(x) \geq 0 \Rightarrow |V(x)| = V(x)$

$$x = x + 3$$

$$0 = 3; 0 \neq 3 \Rightarrow K_2 = \{ \}$$

$$5) \quad K = K_1 \cup K_2 = \left\{ \frac{-3}{2} \right\}$$

Příklady k procvičení:

1. $|x + 3| = 2x - 7$

$$K = \{10\}$$

2. $x + |2 - 3x| = 4$

$$K = \left\{-1; \frac{3}{2}\right\}$$

Rovnice, která obsahuje více absolutních hodnot.

Řešíme metodou nulových bodů.

Př.: Řešte v $\mathbb{R}$.

$$|2x - 7| + |x - 2| = 3$$

1) NB:

$$2x - 7 = 0$$

$$x = \frac{7}{2}$$

$$x - 2 = 0$$

$$x = 2$$

2) Intervaly: $I_1 = (-\infty; 2)$ $I_2 = \left\langle 2; \frac{7}{2} \right\rangle$ $I_3 = \left\langle \frac{7}{2}; \infty \right\rangle$

3) Tabulka:

	$I_1 = (-\infty; 2)$	$I_2 = \left\langle 2; \frac{7}{2} \right\rangle$	$I_3 = \left\langle \frac{7}{2}; \infty \right\rangle$
$2x - 7$	-	-	+
$x - 2$	-	+	+

4) Řešení:

a) $I_1 = (-\infty; 2)$

$$-(2x - 7) + (x - 2) = 3$$

$$-3x = -6$$

$$x = 2; 2 \notin I_1 \Rightarrow K_1 = \{ \}$$

b) $I_2 = \left(2; \frac{7}{2} \right)$

$$-(2x - 7) + (x - 2) = 3$$

$$-x = -2$$

$$x = 2; 2 \in I_2 \Rightarrow K_2 = \{2\}$$

c) $I_3 = \left(\frac{7}{2}; \infty \right)$

$$(2x - 7) + (x - 2) = 3$$

$$3x = 12$$

$$x = 4; 4 \in I_3 \Rightarrow K_3 = \{4\}$$

5) $K = K_1 \cup K_2 \cup K_3 = \{2; 4\}$

Př.: Řešte v $\mathbb{R}$:

$$|x + 2| + |x - 1| = 3$$

1) NB: -2; 1

2) I: $I_1 = (-\infty; -2)$; $I_2 = \langle -2; 1 \rangle$; $I_3 = \langle 1; \infty \rangle$

3) T:

	$I_1 = (-\infty; -2)$	$I_2 = \langle -2; 1 \rangle$	$I_3 = \langle 1; \infty \rangle$
$x + 2$	-	+	+
$x - 1$	-	-	+

4) Ř:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \forall I_1 = (-\infty; -2) & -(x+2) - (x-1) = 3 \\ & x = -2; -2 \notin I_1 \Rightarrow K_1 = \{ \} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{b) } \forall I_2 = \langle -2; 1 \rangle & (x+2) - (x-1) = 3 \\ & 0 = 0 \Rightarrow K_2 = \langle -2; 1 \rangle \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{c) } \forall I_3 = \langle 1; \infty \rangle & (x+2) + (x+1) = 3 \\ & 2x = 0 \\ & x = 0; 0 \notin I_3 \Rightarrow K_3 = \{ \} \end{array}$$

$$5) K = K_1 \cup K_2 \cup K_3 = \{ \} \cup \langle -2; 1 \rangle \cup \{ \} = \langle -2; 1 \rangle$$

Příklady k procvičení: (složitější rovnice)

1. $|x - 2| + 2|1 - x| = 2x - 1$

$$K = \{1; 3\}$$

2. $|x - 5| - |2x + 11| = 6$

$$K = \{-10; -4\}$$

3. $|x + 1| + |x| = |x - 1|$

$$K = \{-2; 0\}$$

4. $x^2 - 5|x| + 6 = 0$

$$K = \{-3; -2\}$$

5. $x^2 - |x - 6| = 0$

$$K = \{-3; 2\}$$

Příklady k procvičení: (složitější rovnice)

6. $|x^2 - 5x + 2| = 2$

$$K = \{0; 1; 4; 5\}$$

7. $2^{|x+2|} = 16$

$$K = \{-6; 2\}$$

8. $|3^x - 5| = 4$

$$K = \{0; 2\}$$

9. $\log_2|3 - x| = 1$

$$K = \{1; 5\}$$

10. $\log_3|x^2 - 5x + 3| = 1$

$$K = \{0; 2; 3; 5\}$$